Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde II op vrijdag 29 mei 2015, 14.00-17.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Bij de opgaven hieronder **behalve Opgave 3** mag u er van uitgaan dat u een een algoritme voor Max Flow, Min cost max flow, Kortste pad, Minimale Opspannende boom beschikbaar hebt. Wanneer u dit wilt toepassen hoeft u alleen aan te geven op welke instantie dit moet gebeuren.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 2 punten voor ieder van de vragen 1b-f, 2a-b;
  - 3 punten voor onderdeel 1a;
  - 4 punten voor ieder van de vragen 2c-d, 3, 4, 5a, 6, 7;
  - 5 punten voor onderdeel 5b.

  Totaal 50 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (c) ook nog nodig hebt).

(b) Toon aan dat de permutaties van (a) een permutatiegroep vormen; associativiteit hoef je niet aan te tonen.

(c) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Gebruik deze notatie hieronder. Je mag bij (d), (e), (f) alleen getallen invullen, en enumeratie levert niets op en kost alleen tijd. **Motiveer uw antwoord**.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen zonder witte kralen.

(e) Bepaal het aantal equivalentieklassen met minstens één rode en minstens één witte kraal.

(f) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

Opgave 2.
Er is werk aan de winkel. In dit geval zijn er n taken die moeten worden uitgevoerd door twee personen: Koos en Toos. Zowel Koos als Toos hebben hun specialiteit, en de taken die daaronder vallen moeten door de betreffende persoon worden gedaan; de overige taken willen ze zo verdelen dat het verschil in hun totale werktijd zo klein mogelijk is (uiteraard in absolute waarde). Noem dit probleem WERK VERDELEN. Van iedere taak T_i ($i = 1, \ldots, n$) is de bewerkingsduur p_i (neem aan dat dit een niet-negatief geheel getal is) bekend en door wie deze mag worden uitgevoerd (Koos, Toos, of beide).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN.

(b) Laat zien dat de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort. U mag er hierbij van uitgaan dat de inputgrootte gelijk is aan $O(n \log p_{\max})$, waarbij $p_{\max}$ de grootste bewerkingsduur uit de instantie is.

(c) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

(d) Stel dat iemand beweert dat hij een algoritme heeft ontwikkeld dat **voor iedere instantie** van het probleem WERK VERDELEN in polynomiale tijd een toegelaten oplossing vindt die maximaal 10 eenheden boven het optimum zit (dus als het optimum z^* is, dan vindt dit algoritme een oplossing met waarde $\leq z^* + 10$). Welke conclusie kunt u dan trekken? Motiveer uw antwoord.

Opgave 3.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

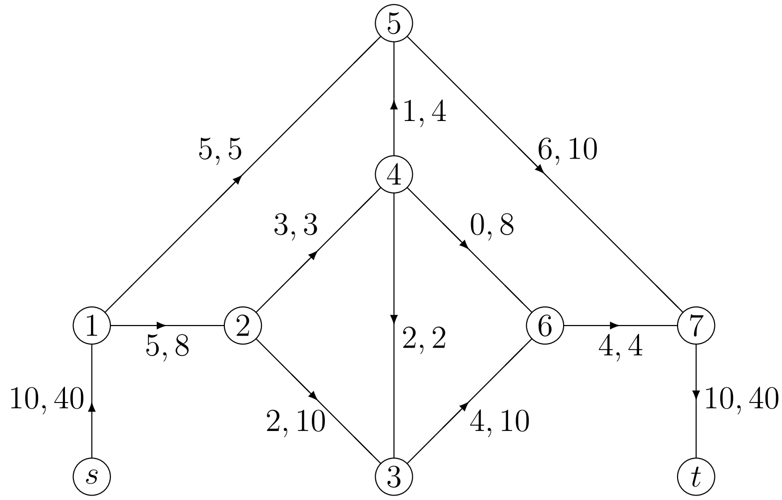

Figure 1: Netwerk.

Opgave 4.
Een aantal studenten is in een willekeurig ski-gebied beland. Het ski-gebied wordt als volgt vertaald in een gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Ieder begin- en eindpunt van een lift correspondeert met een punt; verder correspondeert ieder punt op de piste waarin je kunt kiezen tussen twee of meer afdalingen met een punt in de graaf. Tussen twee punten v en w loopt een pijl indien het mogelijk is om v naar w te skiën zonder een punt in de graaf te passeren. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Tussen twee punten kunnen verschillende pijlen lopen; die nummer je dan als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz. Definieer q_{vw} als het aantal verschillende pijlen van v naar w. Hernummer de punten in V als $1, \ldots, |V|$ zodanig dat voor iedere pijl $(v, w) \in A$ geldt dat $v > w$ (dit kan omdat de graaf acyclisch is); neem aan dat de m eindpunten nummer $1, \ldots, m$ hebben gekregen. Een afdaling begint bij een beginpunt en eindigt bij een eindpunt; twee afdalingen zijn verschillend indien ze minstens één verschillende pijl bevatten; hierbij tellen $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ als verschillende pijlen.

Geef een algoritme om het aantal verschillende afdalingen te bepalen.

Opgave 5.
Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 4, maar neem aan dat nu $q_{vw} = 1$ (dus er is maar één manier om van v naar w te skiën). Het doel van de studenten is om zo mooi mogelijke afdalingen te maken. Daarom wordt bij iedere pijl $(v, w) \in A$ de waardering van de pijl bepaald; gebruik $w(v, w)$ om deze waardering aan te geven.

(a) Geef aan hoe je de afdaling met hoogste totale waardering kunt bepalen.

(b) De studenten willen natuurlijk niet 1 afdaling maken, maar een stuk of 20 per dag. Twintig maal dezelfde afdaling van (a) gaat natuurlijk vervelen, en daarom willen ze de 20 afdalingen selecteren met in totaal maximale waardering. Een pijl (v, w) mag hierbij maximaal zes keer worden geselecteerd; de eerste keer levert een score van $w(v, w)$ op; de tweede keer een score van $w(v, w)/2$ en daarna een score van 0. Er zit geen grens op het aantal malen dat je door een kruispunt mag gaan. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen.

Opgave 6.
Gegeven is een datacentrum dat door middel van een netwerk is verbonden met een aantal klanten. Dit netwerk kan worden gemodelleerd als een ongerichte samenhangende graaf G met puntenverzameling V en pijlenverzameling E; het datacentrum bevindt zich in het punt v_0. De klanten willen verbinding houden met het datacentrum, ook als een aantal kanten in het netwerk uitvallen. In dit verband wordt de betrouwbaarheid van een verbinding tussen een klant en het datacentrum gedefinieerd als het minimale aantal kanten dat moet worden weggelaten om de verbinding te verbreken. Geef aan hoe u de betrouwbaarheid van een verbinding kunt bepalen voor een gegeven klant.

Opgave 7.
Bij het oplossen van het HANDELSREIZIGERSPROBLEEM op een graaf $G = (V, E)$ met behulp van *branch-and-bound* gebruikt men een zogenaamde *1-tree*. Een 1-tree bestaat uit een opspannende boom plus één extra kant, waarbij vooraf een verzameling kanten D is gegeven die allemaal zeker tot de 1-tree moeten behoren. Gegeven de graaf $G = (V, E)$ met gegeven lengte $l(e) > 0$ voor iedere kant $e \in E$ en gegeven de kantenverzameling $D \subset E$, geef aan hoe je een 1-tree van minimale lengte kunt bepalen die alle kanten in D bevat. U mag er hierbij van uit gaan dat D een acyclische deelgraaf van E is en dat er geen twee kanten zijn met gelijke lengte. **Bewijs de correctheid van uw algorithme; u mag hierbij uitgaan van de correctheid van de bij het college behandelde algoritmen om een minimale opspannende boom te bepalen**.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^r.$$