**Universiteit Utrecht**
**Betafaculteit**
**Examen Discrete Wiskunde op donderdag 9 maart 2017, 13.30-16.30 uur.**

- Wie recht heeft op extra tijd en op de lijst staat mag een uur langer blijven zitten.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven en bonusopgave 8b.
- Op opgave 2a kunnen 3 punten worden gehaald; op iedere andere (deel)opgave kunnen maximaal 4 punten worden gescoord; totaal 55 punten; dit is inclusief 4 punten voor de bonusopgave.
- Helemaal op het eind zit een formuleblad.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Tenzij er om een afleiding wordt gevraagd, zoals bij vraag 7, hoeft u in geval van een standaardsituatie alleen de naam van de situatie te noemen om het toe te mogen passen (zoals bij de chocoladebox); in geval er om een afleiding wordt gevraagd mag u alleen zonder bewijs uitgaan van het aantal permutaties en combinaties.

**Succes!**

==============================================

**Opgave 1**.
Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat van alle kleuren het aas aanwezig is, en dat er één kleur is met 5 kaarten, één kleur met vier kaarten, en dat van de overige twee kleuren er precies 2 kaarten zijn. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen. **N.B.** De volgorde waarin je de kaarten trekt is niet van belang.

**Opgave 2**
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$(a)$ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 2$.

$(b)$ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 6n$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 2$.

**Opgave 3**
Gegeven zijn de getallen $1, 2, \ldots, n$. Bepaal het aantal mogelijke rijtjes van $k$ getallen hieruit, waarbij de gekozen getallen in volgorde van grootte staan en er geen twee opeenvolgende getallen zijn gekozen.

**Opgave 4**
Gegeven zijn 30 identieke blauwe en 30 identieke rode ballen. De 60 ballen worden op een willekeurige manier op een rijtje gelegd. We delen de blauwe en rode ballen op in groepjes, waarbij een groepje altijd wordt begrensd door een bal van een andere kleur of het begin/eind. Bereken het aantal verschillende, herkenbare mogelijkheden met 21 groepjes blauwe ballen en 20 groepjes rode ballen.

**Opgave 5**
Geef een **combinatorisch** bewijs van de volgende gelijkheid

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F(n);$$

hierbij is $F(n)$ het $n$de Fibonacci getal, waarbij geldt $F(0) = 1$ en $F(1) = 2$.

**Opgave 6**
(a) Geef een **combinatorisch** bewijs voor de gelijkheid

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lceil \frac{k+1}{2} \rceil x^k$$

(b) Bereken met behulp van een genererende functie het aantal mogelijke triples van gehele, niet-negatieve getallen $(x, y, z)$ waarvoor geldt dat $x$ even is, $x \leq y$, $z \geq 1$, en $x + y + z \in \{13, 14, 15, 16\}$. Het is hierbij de bedoeling dat u zowel de genererende functie als het aantal mogelijkheden bepaalt.

**Berekeningen zonder genererende functie kosten alleen tijd en leveren niets op**. Je hoeft niet te bewijzen dat je een genererende functie mag gebruiken in deze situatie.

**Opgave 7.**
Twee schaakclubs willen hun krachten meten in een wedstrijd. Hiervoor vaardigen ze beide $n$ spelers af die de eer van de club hoog gaan houden. Er worden twee wedstrijden gespeeld; in de eerste wedstrijd spelen alle spelers van club 1 met wit, en in de tweede wedstrijd is het net omgekeerd. De partijen worden willekeurig ingedeeld (waarbij uiteraard steeds een speler van club 1 tegen een speler van club 2 speelt), maar het mag niet voorkomen dat twee spelers twee keer tegen elkaar spelen. Bepaal de functie $f(n)$ die het aantal mogelijke, verschillende indelingen aangeeft voor $n$ spelers per team; het maakt hierbij verschil uit of je met wit of met zwart tegen dezelfde speler speelt! Geef hierbij een volledige afleiding voor $f(n)$ waaruit de correctheid blijkt; alleen een formule is niet genoeg.

**Opgave 8**
(a) Voor een spelprogramma van het soort Expeditie Poolcirkel moeten twee teams van twee mensen hun krachten meten in een sliederace, waarbij iedere slede met hetzelfde gewicht van zo'n 120 tot 160 kilo wordt beladen (de trekkracht wordt geleverd door de deelnemers zelf). Om aan gewicht te komen wordt opdracht gegeven om 10 keien te verzamelen; iedere kei moet een ander, geheeltallig gewicht hebbben van minstens 60 en maximaal 80 kilo.

Toon aan dat het met deze combinatie van 10 stenen altijd mogelijk is om beide sleden even zwaar te beladen met een gewicht $\geq 120$ en $\leq 160$ kilo.

(b) Helaas heeft de productie naar een 'expert' geluisterd die beweerde dat slechts 7 van dit soort stenen ook wel genoeg was. Op het moment dat de opnamen beginnen, blijkt het toch niet mogelijk om beide sleden even zwaar te beladen met een gewicht $\geq 120$ en $\leq 160$ kilo. Daarom wordt een list verzonnen: één van de deelnemers veinst een blessure, en de race wordt gehouden tussen het team van twee en de eenling, waarbij de eenling de helft van het gewicht op de slee krijgt. Toon aan dat dit wel mogelijk is. **N.B.** Dit is de bonusopgave; vermoedelijk iets lastiger.

**Opgave 9**
Een storm geselt het vlakke land, waarop een verzameling van $n$ boompjes staan. Bij iedere rukwind worden de boompjes getest: als er nog $k$ boompjes staan, dan is er een kans van $1/(k+1)$ dat er $j$ boompjes omgaan, voor alle $j = 0, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal rukwinden $T(n)$ dat nodig is om de $n$ boompjes om te krijgen. Er geldt $T(1) = 2$!

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast $X$ is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde $q$. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1*1/6+2*1/6+\ldots+6*1/6 = 3,5$, want de kans op $q$ ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

**Opgave 10**
Los de onderstaande recurrente betrekking op.

$$\frac{(n+3)}{n+5}a_n = \frac{(n+1)}{(n+3)}a_{n-1} + 2(n+4) \quad \text{voor } n \geq 1 \text{ met } a_0 = 20.$$

**Opgave 11.**
Los de onderstaande recurrente betrekking op **met behulp van een genererende functie.**

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

## Formules enz.

**Inclusion-Exclusion**
Stel dat er in totaal $N$ objecten zijn. Ieder object kan $r$ verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van $t$ ($t = 1, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de $N$ objecten aan die geen enkele van de $r$ eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r = N + \sum_{t=1}^{r} (-1)^t s_t$$

Het aantal objecten met precies $m$ eigenschappen is gelijk aan

$$e_m = \sum_{t=0}^{r-m} (-1)^t \binom{m+t}{t} s_{m+t}$$

**Binomium**
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om $n$ genummerde ballen te verdelen over $k$ onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$