Uitwerking Toets DW 9-3-2017

1) Stel dat je 5 schoppens, 4 hartens, 2 ruitens, 2 klavers hebt met alle azen. De kans hierop is

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{12}{4}\binom{1}{1}\binom{12}{3}\binom{1}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1}}{\binom{52}{13}} = \frac{\binom{12}{4}\binom{12}{3}\binom{12}{1}\binom{12}{1}}{\binom{52}{13}},$$ want van de

12 harten buiten het aas moet en 4 kiezen bij schoppen, enz.
Deze kans moet maal 12, want je kunt op 12 manieren de 5-4-2-2 kiezen.

2a De karakteristieke vergelijking luidt $x^2-2x+1=0$
$\Rightarrow a_n = \lambda + \mu n$. Invullen $n=0$ geeft $a_0 = \lambda = 1$ en $n=1$ levert $a_1 = \lambda + \mu = 2 \Rightarrow \lambda = \mu = 1$.
Oplossing: $a_n = n+1$.

b De homogene oplossing is $a_n = \lambda + \mu n$. Er geldt $H(a_n) = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$ en je zoekt p_n zodanig dat $H(p_n) = 6n$. Uit de homogene oplossing volgt $H(1) = H(n) = 0$.
$H(n^2) = n^2 - 2(n-1)^2 + (n-2)^2 = n^2 - 2n^2 + 4n - 2 + n^2 - 4n + 4 = 2$
$H(n^3) = n^3 - 2(n-1)^3 + (n-2)^3 = n^3 - 2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (n^3 - 6n^2 + 12n - 8) = -6n + 2 + 12n - 8 = 6n - 6$. Dus geldt $H(n^3 + 3n^2) = 6n$.
Algemene oplossing: $a_n = n^3 + 3n^2 + \mu n + \lambda$.
Invullen $n=0 \Rightarrow a_0 = \lambda = 1$; invullen $n=1 \Rightarrow a_1 = 4 + \mu + \lambda = 2$
$\Rightarrow \lambda = 1$ en $\mu = -3$.
Oplossing $a_n = n^3 + 3n^2 - 3n + 1$.

3 Geen twee opeenvolgende getallen $\Rightarrow$ tussen twee gekozen getallen moet eentje extra. Je kunt het probleem vergelijken met het plaatsen van k mensen op een rij van n stoelen. Pak er $(k-1)$ stoelen van de n weg en voeg die later aan de rechterkant van een persoon toe. Je kunt nu zonder restrictie die k personen laten gaan zitten $\Rightarrow$
$\binom{n-(k-1)}{k} = \binom{n-k+1}{k}$ mogelijkheden.

Uitwerking Toets DW 9-3-2017

4a Kies 30 plaatsen uit de 60 om de blauwe ballen neer te leggen $\Rightarrow \binom{60}{30}$ mogelijkheden. (4a vervalt)

b Je wilt 21 blauwe groepjes en 20 rode. Een groepje bestaat uit minstens 1 bal $\Rightarrow$ nog 9 blauwe te verdelen over de 21 blauwe groepjes. Volgens het chocolaatjesprincipe (de ballen zijn onherkenbaar; de groepjes zijn herkenbaar want op volgorde) $\Rightarrow$ 21 zmaken en 9 chocolaatjes. Dit levert $\binom{29}{20}=\binom{29}{9}$ mogelijkheden op (20 streepjes plaatsen met 29 mogelijkheden).

Evenzo 30 rode ballen in 20 groepjes met minstens 1 bal per groepje $\Rightarrow$ 20 zmaken en 10 chocolaatjes. Dus $\binom{29}{19}=\binom{29}{10}$ mogelijkheden. In totaal $\binom{29}{10}\binom{29}{9}$.

5 Links staat het aantal mogelijkheden van vraag (3) gesommeerd over alle mogelijke waarden van k. Dus links staat het aantal mogelijkheden om mensen op n stoelen te zetten, waarbij geen twee mensen naast elkaar zitten. Dit aantal is gelijk aan $F(n)$: $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$, want als je de laatste stoel vrij laat, dan heb je $F(n-1)$ mogelijkheden en als je de laatste stoel bezet, dan heb je $F(n-2)$ mogelijkheden. De waarden $F(0)=1$ en $F(1)=2$ kloppen.

6a $x \leq y \Rightarrow y-x \geq 0$. Definieer $a=y-x$ en elimineer y.
$z \geq 1 \Rightarrow z-1 \geq 0$; definieer $b=z-1$ en elimineer z.
$x+y+z = x+(a+x)+(b+1) = a+2x+b+1 \in \{13,14,15,16\}$.
$G(2x)= 1+u^4+u^8+\cdots = \dfrac{1}{(1-u^4)}$.

$G(a)=G(b) = 1/(1-u)$.

Voeg een extra variabele toe die de waarde 0, 1, 2, 3 aanneemt; noem dit $c \Rightarrow G(c)=1+u+u^2+u^3= \dfrac{(1-u^4)}{(1-u)}$.

Uitwerking Toets DW 9-3-2017

De genererende functie is gelijk aan het product
$$G(x)\cdot G(a)\cdot G(b)\cdot G(c) = \frac{(1-u^4)}{(1-u)}\cdot\frac{1}{(1-u^4)}\cdot\frac{1}{(1-u)}\cdot\frac{1}{(1-u)} = \frac{1}{(1-u)^3}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k .$$
Je wilt $a+2x+b+1+c=16 \Rightarrow$ zoek de coëfficiënt van $x^{15} \Rightarrow \binom{17}{2} = 136$.

b $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ is de genererende functie van $y+2z$, met $y\geq 0$ en $z \geq 0$. Dit correspondeert met de situatie $a \geq z \geq 0$, want $y = a-z$ en $a+z$ als doel levert $y+2z$ op (net als bij (a)).
Het aantal mogelijkheden om $y+2z=k$ te krijgen is dan gelijk aan het aantal mogelijkheden voor $a+z=k$ met $a\geq z\geq 0$. Dit aantal mogelijkheden is gelijk aan $\lceil (k+1)/2 \rceil$, want z kan de waarden $0, 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$ aannemen, dus $\lceil (k+1)/2 \rceil$ in totaal.
Overigens kun je natuurlijk ook werken met $x+2y=k$ en $x,y \in \mathbb{N}_0$: voor y heb je de mogelijkheden $0,1,\dots,\lfloor k/2 \rfloor$ en x krijgt daarna de correcte waarde.

7 In de eerste ronde speelt speler i van team 1 tegen speler $\pi(i)$ van team 2; iedere permutatie voldoet $\Rightarrow n!$ mogelijkheden.
In de tweede ronde speelt speler i van team 1 tegen speler $\sigma(i)$ van team 2, maar $\sigma(i) \neq \pi(i)$, voor $i=1,\dots,n$. Het aantal mogelijkheden is dus $D(n)$: het aantal derangements.
Je kunt een uitdrukking vinden voor $D(n)$ met behulp van inclusie-exclusie, waarbij eigenschap i is dat speler i tegen $\pi(i)$ speelt (voor het gemak hernummeren we de spelers van team 2 zodanig dat $\pi(i)=i$). Nu geldt
$$S_t = (n-t)!\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!},$$
want je kunt op $\binom{n}{t}$ manieren de t uit n kiezen die meetellen in S_t, en $N(a_{i_1},\dots,a_{i_t}) = (n-t)!$, want je mag nog maar $(n-t)$ elementen vrij permuteren. Dit invullen levert

Uitwerking Toets DW 9-3-2017

$$D_n = n! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t \frac{n!}{t!}.$$

Het aantal mogelijkheden is gelijk aan $n! D_n$.

8a Het aantal paren bedraagt $\binom{10}{2} = 45$. Wanneer je voor ieder paar (i,j) het totale gewicht bepaalt, dan krijg je ≥ 121 en ≤ 159: er zijn dus minder dan 45 verschillende waarden mogelijk. Volgens het duiventilprincipe zijn er dus minstens twee paren met gelijke som. Wanneer één element in beide paren voorkomt, dan hebben de beide andere stenen gelijk gewicht; dit is niet mogelijk volgens het gegeven. Dus zijn de paren volledig verschillend, en kun je die op de sleden leggen.

b Bepaal nu voor iedere paar het verschil; zorg dat dit ≥ 0 is. Het aantal mogelijke waarden bedraagt ≤ 19 $(1, \dots, 19)$; dit is kleiner dan $\binom{7}{2} = 21$ (aantal paren). Indien de paren volledig verschillend zijn $\{a,b\}$ en $\{c,d\}$, dan geldt $a - b = c - d$, dus $a + d = b + c$ en je hebt twee paren voor op de sleden. Als de paren één element gemeen hebben ($\{a,b\}$ en $\{a,c\}$), dan moet gelden $a - b = c - a$ (want b en c hebben verschillend gewicht). Dus $2a = b + c$ en je hebt het speciale geval dat $a = (b+c)/2$.

9 Er geldt $T(n) = 1 + (T(n) + T(n-1) + \dots + T(0))/(n+1)$; uitwerken verwachte waarde na 1 uitkwind. Hieruit volgt $nT(n) = (n+1) + T(n-1) + \dots + T(0)$. Evenzo geldt $T(n-1) = 1 + (T(n-1) + \dots + T(0))/n$, dus $(n-1)T(n-1) = n + T(n-2) + \dots + T(0)$. Trek de tweede gelijkheid van de eerste af $\Rightarrow nT(n) - (n-1)T(n-1) = 1 + T(n-1)$. Herschrijven geeft $T(n) = T(n-1) + 1/n$. Uitrollen levert $T(n) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + T(1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 1/i$, want $T(1) = 2$.

Uitwerking Toets DW 9-3-2017

10 $\frac{(n+3)}{(n+5)} a_n = \frac{(n+1)}{(n+3)} a_{n-1} + 2(n+4)$ $\forall n \geq 1$ met $a_0 = 20$.

Sommatie-factor methode toepassen:

$$s_n \frac{(n+3)}{(n+5)} a_n = s_n \frac{(n+1)}{(n+3)} a_{n-1} + 2 s_n (n+4)$$

Je wilt dat $s_n \frac{(n+1)}{(n+3)} a_{n-1} = s_{n-1} \frac{(n+2)}{(n+4)} a_{n-1}$, dus

$$s_n = \frac{(n+2)}{(n+4)} \cdot \frac{(n+3)}{(n+1)} s_{n-1} \quad \forall n$$

Uitrollen met $s_k = \frac{(k+2)}{(k+4)} \frac{(k+3)}{(k+1)} s_{k-1}$ levert

$$s_n = \frac{(n+2)}{(n+4)} \cdot \frac{(n+3)}{(n+1)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n)} \cdot \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)} \cdots s_0 \Rightarrow$$

$s_n = \frac{n+2}{n+4}$ voldoet. Invullen geeft

$$\frac{(n+2)}{(n+4)} \cdot \frac{(n+3)}{(n+5)} a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} a_{n-1} + 2(n+2) \quad \forall n \geq 1.$$

Substitueer $T(n) = \frac{(n+2)}{(n+4)} \frac{(n+3)}{(n+5)} a_n \Rightarrow$

$$T(n) = T(n-1) + 2(n+2)$$

Uitwerken levert $T(n) = \sum_{k=1}^{n} 2(k+2) + T(0)$.

$$a_0 = 20 \Rightarrow T(0) = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot 20 = 6 \Rightarrow T(n) = \sum_{k=1}^{n} 2(k+2) + 6 =$$

$$n(n+5) + 6 = n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3).$$

Hieruit volgt $a_n = \frac{(n+4)(n+5)}{(n+2)(n+3)} \cdot (n+2)(n+3) = (n+4)(n+5)$.

Checken: invullen in de recurrente betrekking levert:

$(n+3)(n+4) = (n+1)(n+4) + 2(n+4)$ met $a_0 = 20$: Klopt.

11 $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2$ $\forall n \geq 2$ met $a_0 = 2$ en $a_1 = 1$

$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k + 2$ $\forall k$. Maal x^{k+2} en sommeren:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^{k+2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2}.$$

Uitwerking Toets DW 9-3-2017

Definieer $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$; werk het geheel uit.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2} = A(x) - a_1 x - a_0 = A(x) - x - 2 .$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^{k+2} = x(A(x) - a_0) = x\,A(x) - 2x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = x^2 A(x) ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^2}{(1-x)} .$$

$$A(x) - x - 2 = 3x\,A(x) - 6x - 2x^2 A(x) + 2x^2/(1-x)$$

$$A(x)(1 - 3x + 2x^2) = -5x + 2 + 2x^2/(1-x)$$

$$A(x) = \frac{-5x+2}{(1-2x)(1-x)} + \frac{2x^2}{(1-2x)(1-x)^2} = \frac{(1-x)(-5x+2) + 2x^2}{(1-2x)(1-x)^2} .$$

Breuksplitsen: $A(x) = \frac{A}{(1-2x)} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{(1-x)^2} =$

$$\frac{A(1-x)^2 + B(1-2x)(1-x) + C(1-2x)}{(1-2x)(1-x)^2} = \frac{(1-x)(-5x+2) + 2x^2}{(1-2x)(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$A(1-x)^2 + B(1-2x)(1-x) + C(1-2x) = 7x^2 - 7x + 2$$

$x = 1 \Rightarrow -C = 2 \Rightarrow C = -2$

$x = 1/2 \Rightarrow 1/4\, A = 1/4 \Rightarrow A = 1$

$x = 0 \Rightarrow A + B + C = 2 \Rightarrow B = 3$

$$A(x) = \frac{1}{(1-2x)} + \frac{3}{(1-x)} - \frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k + 3 - 2(k+1)\right) x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 2k + 1) x^k .$$

Dus $a_n = 2^n - 2n + 1$.