Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde op donderdag 13 april 2017, 14.30-17.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Op de laatste bladzijde staat een aantal algoritmen vermeld; deze algoritmen mag je als een black-box gebruiken. Wanneer dus wordt gevraagd om een algoritme te geven om probleem A op te lossen, en je kunt bijv. bewijzen dat je probleem A kunt formuleren als een kortste pad probleem op een graaf (die je natuurlijk netjes moet definieren), dan ben je klaar.
- Voor opgave 1 is een antwoordformulier beschikbaar.
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 5 punten voor ieder van de vragen 5,6.
  - 4 punten voor ieder van de vragen 1, 2c, 3a, 3b, 4b, 7.
  - 3 punten voor onderdeel 2a, 2d, 4c.
  - 2 punten voor onderdeel 2b, 4a.

  Totaal 47 punten.
- Vergeet niet de evaluatie in te vullen.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend. Gebruik het antwoordformulier**.

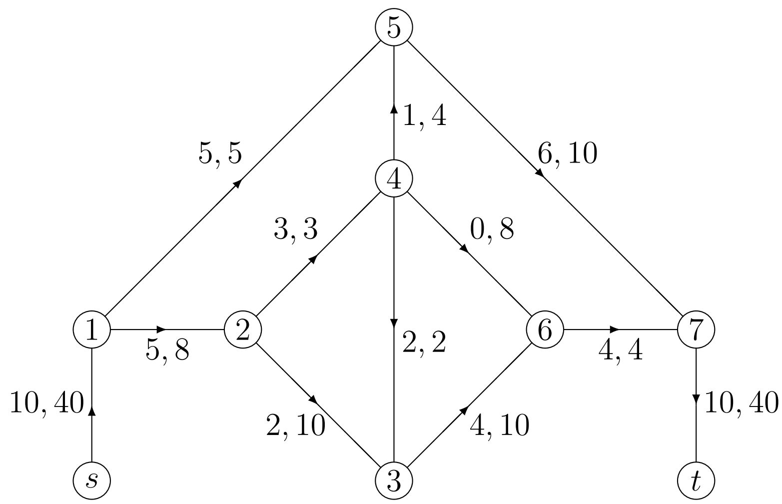

Figure 1: Netwerk.

Opgave 2.
Beschouw de onderstaande schematische weergave van een kloon van Monsieur Canibale. Er zijn acht ketels (genummerd 1 t/m 8) die op een aantal draaischijven staan. De ketels 3, 4, 7, 8 maken alleen grote rondes; de ketels 1, 2, 5, 6 draaien ook nog rond op de kleine draaischijven, zodat bijv. ketel 1 soms aan de buitenkant en soms aan de binnenkant is. Alle ketels zijn identiek (op de kleur na), en **je kunt niet zien welke tweetallen ketels op een draaischijf staan en welke niet**. De ketels moeten worden geverfd, en het gaat om het aantal herkenbaar verschillende kleuringen (het aantal equivalentieklassen in het jargon van DW).

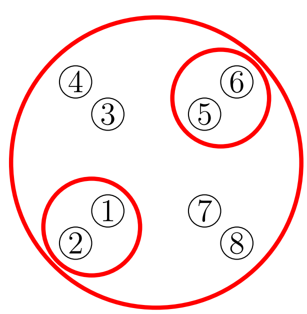

Figure 2: Kloon Monsieur Canibale: schematisch

(a) Geef **expliciet** de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) nodig hebt). Je mag vanaf nu aannemen dat deze permutaties een groep vormen.

(b) De ketels worden geverfd; hiervoor hebben we de kleuren rood, wit, blauw en zwart beschikbaar. Gegeven de gewichten $w(\text{rood}) = r$, $w(\text{wit}) = w$, $w(\text{blauw}) = b$ en $w(\text{zwart}) = z$, bepaal de pattern inventory (notatie $\text{Inve}(r, w, b, z)$). U mag hierbij uiteraard machten van $(r + w + b + z)$, enz. laten staan.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen rode ketels bevat, precies één witte, en meer zwarte dan blauwe ketels, waarbij u zoveel mogelijk geschikte getallen invult. Enumeratie levert niets op.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen zwarte ketels, en een even aantal (mag 0 zijn) witte ketels bevat. U mag hierbij alleen **getallen** invullen; enumeratie levert niets op. Om het rekenwerk te beperken hoeft u alleen de formules te geven in termen van $Inve(r, w, b, z)$ waarbij u dan aangeeft welke getallen u invult. **Motiveer uw antwoord.**

Opgave 3.
Een tweetal jonge ondernemers wil een handelsfirma opzetten gespecialiseerd in het verkopen van product X. Iedere vrijdag gaan ze op de markt voorraden inslaan, waarvan ze dan een deel in het weekend verkopen; het restant wordt opgeslagen in het schuurtje van kennis Y. Hierbij zijn de volgende karakteristieken gegeven:

- Er zijn T weken; een week loopt van donderdag tot en met woensdag en bevat dus zowel de inkoop als verkoop.
- In week t ($t = 1, \ldots, T$) kunnen ze een willekeurig geheel aantal van maximaal m_t eenheden aanschaffen; iedere eenheid kost c_t.
- De beginvoorraad is 0. In het schuurtje is ruimte voor maximaal V eenheden. De voorraadkosten worden in natura betaald: na afloop van de week ontbreekt altijd precies één eenheid van de op voorraad gelegde eenheden.
- In week t moeten d_t eenheden worden geleverd (minder is niet toegestaan); dit levert q_t per eenheid op; d_t is geheeltallig.

(a) Geef een algoritme om een optimaal inkoop- en verkoopplan te bepalen.

(b) De ondernemers dachten goedkoop (rente 0%) te kunnen lenen bij de overheid om hun aankopen te financieren, maar helaas blijkt net de wet gewijzigd te zijn. Daarom moeten ze naar de bank, waar ze een rekening openen waarop ze voldoende rood mogen staan om de aankoopkosten te kunnen financieren; dit kost ze dan het schappelijke tarief van z% rente per week (het resterende geld wordt direct weer op de bank gezet; een eventueel batig saldo levert het ronde percentage van 0% rente op). Geef een algoritme om een optimaal inkoop- en verkoopplan te bepalen.

Opgave 4.
Er is werk aan de winkel. Gegeven is een aantal van n klanten dat geholpen moet worden door één medewerker. Iedere klant j ($j = 1, \ldots, n$) heeft een interval $[b_j, e_j]$ gespecificieerd gedurende welke hij/zij beschikbaar is; verder is de tijdsduur p_j van iedere klus j ($j = 1, \ldots, n$) gegeven. Het is de bedoeling dat zo veel mogelijk klanten worden geholpen. Een klus moet zonder onderbreking worden uitgevoerd; klus j ($j = 1, \ldots, n$) mag niet starten voor tijdstip b_j en moet uiterlijk klaar zijn op tijdstip e_j. De medewerker is altijd beschikbaar. Noem dit probleem ZGMH (Zo Goed Mogelijke Hulp).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem ZGMH.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem ZGMH $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

(c) Toon aan dat het niet waarschijnlijk is (dan geldt gelijkheid van de klassen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{NP}$) dat er een algoritme bestaat dat in polynomiale tijd een oplossing vindt voor probleem ZGMH waarin ten hoogste 2 klanten minder worden bediend dan in een optimale oplossing.

Opgave 5.
Beschouw de volgende variant van het probleem ZGMH: voor iedere klus geldt dat $e_j = b_j + p_j$ (wanneer je klus j ($j = 1, \ldots, n$) wilt uitvoeren, dan moet je beginnen op tijdstip b_j en het werk is pas klaar op tijdstip e_j). Wanneer je klus j uitvoert, dan levert dit een opbrengst o_j op.

Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met behulp van één van de op het college behandelde algoritmen (zie onder).

Opgave 6.
Gegeven is een gerichte graaf $G = (V, A)$, waarbij $l(v, w)$ de lengte aangeeft van iedere pijl $(v, w) \in A$; deze lengtes zijn allemaal ≥ 0. De pijlen in dit netwerk moeten worden gecheckt op fouten. Het checken gebeurt door middel van een robot; deze 'wandelt' van v naar w (als (v, w) een pijl in de graaf is) en vervolgt dan zijn weg door een andere pijl, of wordt opgehaald door een werknemer. De kosten van de robot bedragen $10l(v, w)$ indien de pijl (v, w) wordt genspecteerd en $l(v, w)$ indien deze pijl alleen wordt doorlopen. De robot begint in punt $s \in V$; de robot kan uit ieder willekeurig punt worden opgehaald en teruggebracht naar s, maar dit kost een bedrag van Q per keer.

Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met behulp van één van de op het college behandelde algoritmen (zie onder).

Opgave 7.
Het algoritme van Prim (of van Prim-Dijkstra) berekent een kortste opspannende boom op de volgende manier:

1. Kies een willekeurig punt $v \in V$ als beginpunt. Begin met $V' = \{v\}$ en $E' = \emptyset$.
2. Bepaal de kant $\{x, y\}$ met minimale lengte waarvoor geldt dat $x \in V'$ en $y \notin V'$. Voeg $\{x, y\}$ toe aan E' en voeg y toe aan V'.
3. Indien $V' \neq V$, ga door met (2).

Toon aan dat het algoritme van Prim-Dijkstra een optimale opspannende boom vindt. **Werk netjes alle stappen in het bewijs uit**.

===

Op het college behandelde algoritmen

- Algoritme van Dijkstra: Dit bepaalt het kortste pad van punt s naar ieder ander punt t in een gerichte graaf $G = (V, A)$. Voorwaarde is dat alle afstanden ≥ 0 zijn.
- Algoritme van Bellman-Ford: Als boven, maar het werkt ook als er pijlen zijn met negatieve lengte, zolang er maar geen cykels zijn met negatieve lengte.
- Algoritme van Kruskal: Gegeven een samenhangende, ongerichte graaf $G = (V, E)$ bepaal je een Minimum Spanning Tree door de kanten aan een (oorspronkelijk lege) kantenverzameling S toe te voegen in volgorde van lengte, waarbij een kant weer wordt verwijderd indien deze tot een cykel in de kantenverzameling S leidt.
- Algoritme van Ford-Fulkerson: Dit bepaalt een stroom van maximale omvang van source (bron) s naar sink (put) t in een gerichte graaf $G = (V, A)$, waarbij voor iedere pijl $(v, w) \in A$ een capaciteit $c(v, w)$ is gegeven. Er geldt dat de ondergrens op de stroom door (v, w) gelijk is aan 0.
- Algoritme voor oplossen van min-cost max-flow probleem: Dit bepaalt de goedkoopste stroom van maximale omvang van source (bron) s naar sink (put) t in een gerichte graaf $G = (V, A)$, waarbij voor iedere pijl $(v, w) \in A$ een capaciteit $c(v, w)$ en kosten $k(v, w)$ zijn gegeven. De kosten van een stroom zijn gelijk aan

  $$\sum_{(v,w) \in A} k(v, w) x_{vw},$$

  waarbij x_{vw} de omvang van de stroom door de pijl (v, w) is. Er geldt weer dat de ondergrens op de stroom door (v, w) gelijk is aan 0.