Herexamen Discrete Wiskunde 2016-2017 deel I
donderdag 6 juli, 2017

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de volgende bladzijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan).
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- Op de vragen 3a en 5a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 50 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Een formuleblad wordt los uitgedeeld.

Succes!

==

Opgave 1. Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er één kleur (van de vier) is waar vier kaarten van worden getrokken en dat van de overige kleuren er drie kaarten worden getrokken. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 2. Voor een willekeurig natuurlijk getal $n \geq 10$ is een verzameling van $2n$ ronde schijven gegeven. Hierbij geldt dat voor iedere j ($j = 1, \ldots, n$) er twee schijven zijn met straal j; één hiervan is volledig doorzichtig met een zwarte rand, en eentje is volledig ondoorzichtig met eveneens een zwarte rand. **Van ieder tweetal met straal j wordt één schijf gekozen**; de n gekozen schijven worden in willekeurige volgorde op een staak geplaatst (met het centrum netjes in het midden). Bereken het aantal mogelijkheden om n schijven te kiezen en te plaatsen (de volgorde op de staak is dus ook van belang) zodanig dat van alle n schijven de rand zichtbaar is. **Bewijs de correctheid van uw antwoord**.

Opgave 3. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 6.$$

$$(b) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4 * 3^n + 8n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 6 \text{ en } a_1 = 14.$$

Opgave 4. Een dierenverzorger zit met een probleem. Voor de komende negen weken heeft hij twee soorten voeding aangeschaft: gewoon voer (35 blikjes) en krachtvoer (28 blikjes). Het dier eet iedere dag 1 blik leeg, en dit mag zowel krachtvoer als gewoon voer zijn, maar wanneer het dier twee dagen achtereen krachtvoer krijgt, dan wordt het ziek. Normaal gesproken een simpel probleem, maar helaas zijn de etiketten van de blikken af, zodat je niet weet of een blik krachtvoer bevat of gewoon voer (en dat kun je ook niet simpel vaststellen). Aangezien de ziekte niet dodelijk is, neemt de verzorger de gok en kiest iedere dag willekeurig een blik uit. Bereken de kans dat het dier niet ziek wordt in de komende 9 weken.

Opgave 5. Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \ldots, 45$) de kinderen met nummers $j - 1$ en $j + 1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) De leerkracht stapt eruit, waarna de kinderen met nummers 1 en 46 de kring weer sluiten. Bereken de kans dat precies 15 jongens met hun linkerhand de rechterhand van een meisje vasthouden (dus dat de kring bestaat uit 15 groepjes jongens en 15 groepjes meisjes).

Name: .... ID: ....

Opgave 6. De functie $f(n)$ is gedefinieerd als

$$f(n) = (4+\sqrt{13})^n + (4-\sqrt{13})^n,$$

voor ieder priemgetal $n \geq 3$. Toon aan dat $f(n)$ geheeltallig is.

Opgave 7. Bereken met behulp van een genererende functie het aantal mogelijke triples van gehele, niet-negatieve getallen (x, y, z) waarvoor geldt $x \leq y$, $x \leq z$ en $x + y + z \in \{13, 14, 15\}$. Het is hierbij de bedoeling dat u zowel de genererende functie als het aantal mogelijkheden bepaalt.

Berekeningen zonder genererende functie kosten alleen tijd en leveren niets op. Je hoeft niet te bewijzen dat je een genererende functie mag gebruiken in deze situatie.

Opgave 8. Vroeger was het simpel: werken op maandag t/m vrijdag en in het weekend vrij en dan nog 30 extra vrije dagen. Bedrijf X heeft echter behoefte aan werknemers die ook op zondag willen werken, en daarom adverteren ze met de volgende arbeidsvoorwaarden: werk op iedere zondag, dan krijg je elke vierde dag en iedere elfde dag vrij (mits deze niet op zondag vallen) en ook nog eens 40 dagen per jaar extra, vrij opneembaar (maar natuurlijk niet op zondag). Bereken het exacte verschil in aantallen vrije dagen tussen de oude en de nieuwe situatie voor de periode van een jaar met 365 dagen zonder feestdagen, waarbij de eerste dag op een maandag valt.

Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Opgave 9. Tien vrienden gaan ter voorbereiding op het carnaval bier drinken; persoon i drinkt n_i glazen bier met $11 \leq n_i \leq 20$ voor alle $i = 1, \dots, 10$; ze hoeven dus niet allemaal een verschillend aantal biertjes te drinken. Daarna bewijzen ze dat ze allemaal goed tegen zoveel bier kunnen door te gaan kaarten: 6 gaan pokeren, en twee paren spelen bridge. Voor het bepalen van de bridgeparen geldt de speciale regel dat het aantal geconsumeerde biertjes per paar gelijk moet zijn (dus als je paren $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$ hebt, dan moet de bierconsumptie van a en b in totaal gelijk zijn aan die van c en d). Indien het niet mogelijk is om die twee paren samen te stellen, dan wordt er extra bier gedronken tot het wel mogelijk is. Hoeveel biertjes moeten er maximaal extra worden gedronken?

Opgave 10. Een storm geselt het vlakke land, waarop een verzameling van n boompjes staan. Bij iedere rukwind worden de boompjes getest: als er nog k boompjes staan, dan is er een kans van $1/(k+1)$ dat er j boompjes omgaan, voor alle $j = 0, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal rukwinden $T(n)$ dat nodig is om de n boompjes om te krijgen. Er geldt $T(1) = 2$.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Hint. Stel een recurrente betrekking op.

Name: .... ID: ....

Opgave 11. Los de onderstaande recurrente betrekking op **met behulp van een genererende functie.** Als je extra ruimte nodig hebt, ga dan door op de achterkant.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 11.