Herexamen Discrete Wiskunde 2016-2017 deel I-II
donderdag 6 juli, 2017

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de volgende bladzijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan).
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 17 (deel)opgaven.
- Puntenwaardering: vragen 3a, 7a, 7c, 7d, 8a maximaal 2 punten; vragen 2a, 7b maximaal 3 punten; vragen 1, 2b, 3b, 4, 5, 6, 8b, 8c maximaal 4 punten; vragen 9, 10 maximaal 5 punten. Totaal 58 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Een formuleblad wordt los uitgedeeld.

Succes!

==

Opgave 1. Voor een willekeurig natuurlijk getal $n \geq 10$ is een verzameling van $2n$ ronde schijven gegeven. Hierbij geldt dat voor iedere j ($j = 1, \ldots, n$) er twee schijven zijn met straal j; één hiervan is volledig doorzichtig met een zwarte rand, en eentje is volledig ondoorzichtig met eveneens een zwarte rand. **Van ieder tweetal met straal j wordt één schijf gekozen**; de n gekozen schijven worden in willekeurige volgorde op een staak geplaatst (met het centrum netjes in het midden). Bereken het aantal mogelijkheden om n schijven te kiezen en te plaatsen (de volgorde op de staak is dus ook van belang) zodanig dat van alle n schijven de rand zichtbaar is. **Bewijs de correctheid van uw antwoord**

Name: .... ID: ....

Opgave 2. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 6.$$

$$(b) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4 * 3^n + 8n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 6 \text{ en } a_1 = 14.$$

Opgave 3. Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \ldots, 45$) de kinderen met nummers $j-1$ en $j+1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) De leerkracht stapt eruit, waarna de kinderen met nummers 1 en 46 de kring weer sluiten. Bereken de kans dat precies 15 jongens met hun linkerhand de rechterhand van een meisje vasthouden (dus dat de kring bestaat uit 15 groepjes jongens en 15 groepjes meisjes).

Opgave 4. Bereken met behulp van een genererende functie het aantal mogelijke triples van gehele, niet-negatieve getallen (x, y, z) waarvoor geldt $x \leq y$, $x \leq z$ en $x + y + z \in \{13, 14, 15\}$. Het is hierbij de bedoeling dat u zowel de genererende functie als het aantal mogelijkheden bepaalt.

Berekeningen zonder genererende functie kosten alleen tijd en leveren niets op. Je hoeft niet te bewijzen dat je een genererende functie mag gebruiken in deze situatie.

Opgave 5. Tien vrienden gaan ter voorbereiding op het carnaval bier drinken; persoon i drinkt n_i glazen bier met $11 \leq n_i \leq 20$ voor alle $i = 1, \ldots, 10$; ze hoeven dus niet allemaal een verschillend aantal biertjes te drinken. Daarna bewijzen ze dat ze allemaal goed tegen zoveel bier kunnen door te gaan kaarten: 6 gaan pokeren, en twee paren spelen bridge. Voor het bepalen van de bridgeparen geldt de speciale regel dat het aantal geconsumeerde biertjes per paar gelijk moet zijn (dus als je paren $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$ hebt, dan moet de bierconsumptie van a en b in totaal gelijk zijn aan die van c en d). Indien het niet mogelijk is om die twee paren samen te stellen, dan wordt er extra bier gedronken tot het wel mogelijk is. Hoeveel biertjes moeten er maximaal extra worden gedronken?

Opgave 6. Een storm geselt het vlakke land, waarop een verzameling van n boompjes staan. Bij iedere rukwind worden de boompjes getest: als er nog k boompjes staan, dan is er een kans van $1/(k+1)$ dat er j boompjes omgaan, voor alle $j = 0, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal rukwinden $T(n)$ dat nodig is om de n boompjes om te krijgen. Er geldt $T(1) = 2$.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Hint. Stel een recurrente betrekking op.

Opgave 7. Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Gebruik deze notatie hieronder. **Je moet bij (c) en (d) aangeven hoe je het gevraagde aantal equivalentieklassen kunt bepalen; het antwoord zelf hoef je niet uit te rekenen**. Gebruik zoveel mogelijk getallen (en dus zo min mogelijk symbolen). **Motiveer uw antwoord**.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen met minstens één rode en minstens één witte kraal.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 7.

Opgave 8. Er is werk aan de winkel. In dit geval zijn er n taken die moeten worden uitgevoerd door twee personen: Koos en Toos. Zowel Koos als Toos hebben hun specialiteit, en de taken die daaronder vallen moeten door de betreffende persoon worden gedaan; de overige taken willen ze zo verdelen dat het verschil in hun totale werktijd zo klein mogelijk is (uiteraard in absolute waarde). Noem dit probleem WERK VERDELEN. Van iedere taak T_i ($i = 1, \ldots, n$) is de bewerkingsduur p_i (neem aan dat dit een niet-negatief geheel getal is) bekend en door wie deze mag worden uitgevoerd (Koos, Toos, of beide).

(a) Formuleer de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

(c) Stel dat iemand beweert dat hij een algoritme heeft ontwikkeld dat **voor iedere instantie** van het probleem WERK VERDELEN in polynomiale tijd een toegelaten oplossing vindt die maximaal 10 eenheden boven het optimum zit (dus als het optimum z^* is, dan vindt dit algoritme een oplossing met waarde $\leq z^* + 10$). Welke conclusie kunt u dan trekken? Motiveer uw antwoord.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 8.

Opgave 9. Bij een (voetbal)wedstrijd heb je een arbiter nodig, en bij gebrek aan goede scheidsrechters wil je de aanwezige scheidsrechters natuurlijk zo veel mogelijk koesteren. Scheidsrechter X is zo'n vrijwilliger die iedere zaterdag (en of zondag) druk bezig is om een aantal wedstrijden in goede banen te leiden tegen een marginale vergoeding.
Gegeven is een verzameling van n wedstrijden in de regio, die X zou kunnen fluiten. Van iedere wedstrijd is bekend waar deze wordt gespeeld, wanneer hij begint en wanneer hij eindigt. Uiteraard wil X graag fluiten, maar sommige wedstrijden net iets grager dan andere wedstrijden; neem aan dat je voor iedere wedstrijd j ($j = 1, \ldots, n$) weet wat het gewicht w_j (> 0) is dat X aan deze wedstrijd toekent. Na afloop van de wedstrijd krijgt X altijd een kopje koffie aangeboden (duurt 15 minuten) en gaat dan een volgende wedstrijd fluiten op hetzelfde sportcomplex, of hij vertrekt om ergens anders een wedstrijd te gaan fluiten. Neem aan dat je de bijbehorende reistijd $c_{i,j}$ om van de plaats van wedstrijd i naar de plaats van wedstrijd j te komen kent; hier zit ook de tijd in die X nodig heeft om zich voor te bereiden op wedstrijd j. Hoewel X graag weer even ergens gaat kijken, vindt hij het toch vervelend om naar een andere plaats te gaan, wat resulteert in een score y_{ij} (< 0) voor de verplaatsing. Het doel van X is om het totaal gewicht van de wedstrijden waar hij aan wordt toegewezen (de w_j component) plus de verplaatsingswaardering (de y_{ij} component) te maximaliseren.

Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met behulp van één van de op het college behandelde algoritmen (zie lijst). **Motiveer uw antwoord**. Geef hierbij ook aan hoe je de oplossing van dat probleem kunt vertalen naar een oplossing voor het scheidsrechterprobleem.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 9.

Opgave 10. Gegeven zijn n mensen die op een punt p aankomen en vervolgens moeten worden getransporteerd naar punt q. Het vervoer gebeurt met bussen (met onbegrensde capaciteit); het inzetten van een bus kost in totaal K, ongeacht het aantal passagiers. Het tijdstip waarop persoon i in p aankomt is t_i $(i = 1, \ldots, n)$; dit is van te voren bekend. Op ieder moment kun je beslissen een bus in te zetten voor de personen die op dat moment aanwezig zijn, of te wachten tot de volgende persoon aankomt. De totale kosten van een oplossing zijn gelijk aan de kosten van het inzetten van de bussen plus de som van de vertrektijden van de n mensen vanuit punt p.

Formuleer een algoritme om dit probleem op te lossen. **Motiveer uw antwoord**. Geef ook aan hoe je de oplossing van dat probleem kunt vertalen naar een oplossing voor het busprobleem. **Hint: begin achteraan**.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 10.