Examen Discrete Wiskunde 2017-2018
donderdag 8 maart, 2018

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de andere zijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan); je kunt ook een extra blad krijgen. Schrijf op elk ingeleverd vel je naam en studentnummer.
- Het is de bedoeling dat je ieder blaadje apart inlevert.
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 15 (deel)opgaven.
- Op de vraag 5a kunnen maximaal 2 punten worden gescoord; op de vragen 1a en 2 kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 56 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden met de mantel der liefde bedekt, tenzij het de spuigaten uitloopt.

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Opgave 1. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 6.$$

$$(b) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4 * 3^n + 8n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 6 \text{ en } a_1 = 14.$$

Name: .... ID: ....

Opgave 2. Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er één kleur (van de vier) is waar vier kaarten van worden getrokken en dat van de overige kleuren er drie kaarten worden getrokken. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 3. Voor een willekeurig natuurlijk getal $n \geq 10$ is een verzameling van $2n$ ronde schijven gegeven. Hierbij geldt dat voor iedere j ($j = 1, \ldots, n$) er twee schijven zijn met straal j; één hiervan is volledig doorzichtig met een zwarte rand, en eentje is volledig ondoorzichtig met eveneens een zwarte rand. **Van ieder tweetal met straal j wordt één schijf gekozen**; de n gekozen schijven worden in willekeurige volgorde op een staak geplaatst (met het centrum netjes in het midden). Bereken het aantal mogelijkheden om n schijven te kiezen en te plaatsen (de volgorde op de staak is dus ook van belang) zodanig dat van alle n schijven de rand zichtbaar is wanneer je van boven af kijkt. **Bewijs de correctheid van uw antwoord**.

Opgave 4. Geef een **combinatorisch bewijs** van de onderstaande gelijkheid. Ieder ander bewijs levert geen punten op en kost alleen maar tijd.

$$\binom{n+1}{3} = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)$$

Opgave 5. Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \dots, 45$) de kinderen met nummers $j - 1$ en $j + 1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) Bereken de kans dat, naast de leerkracht, de kring bestaat uit 15 groepjes jongens en 15 groepjes meisjes. Hierbij wordt een groepje jongens aan beide kanten begrensd door een groepje meisjes dan wel de leerkracht (en evenzo voor de meisjes).

Opgave 6. Bij een conferentie staan $n+3$ stoelen in een cirkel opgesteld. Op drie naast elkaar gelegen stoelen zitten de voorzitter met aan weerszijden een ordehandhaver. Op de overige n stoelen kunnen delegaties plaats nemen; een delegatie bestaat uit een delegatieleider (bobo), samen met zijn linker- en rechterhand. Een delegatie neemt op drie opeenvolgende stoelen plaats; tussen twee delegaties moeten minstens twee stoelen leeg blijven (een delegatie mag direct naast een ordehandhaver plaatsnemen). We willen het aantal mogelijkheden a_n weten om de delegaties te plaatsen op die n resterende stoelen; de verschillende delegaties zijn onherkenbaar, dus de volgorde waarin ze zitten is niet belangrijk.

(a) Geef een recurrente betrekking voor het aantal mogelijkheden a_n (hierbij staat het aantal delegaties dat plaatsneemt dus niet van te voren vast). Geef ook aan wat de beginwaarden zijn.

(b) Bepaal a_n gegeven dat er precies k delegaties moeten plaatsnemen.

(c) Ga er nu vanuit dat de delegaties genummerd zijn en dus herkenbaar zijn. Sommige delegaties zijn elkaar niet zo gunstig gezind, en daarom wordt verordonneerd dat delegaties 1 en 2 niet naast elkaar mogen zitten; hetzelfde geldt voor de delegaties 3 en 4. Geef aan hoe je het aantal mogelijkheden om de delegaties op correcte wijze te laten plaatsnemen kunt berekenen voor deze extra voorwaarde. Met niet naast elkaar wordt bedoeld dat er minstens één delegatie dan wel de voorzitter tussen moet zitten.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 6.

Opgave 7. De functie $g(n)$ is gedefinieerd als $g(n) = 2^n + n2^n + n + 1$. Bepaal een recurrente betrekking (er zijn verschillende mogelijkheden) van de vorm

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + f(n),$$

waarvoor geldt dat $g(n)$ een oplossing van deze recurrente betrekking is voor alle $n \geq 2$; hierbij moet gelden $c_1 \neq 0$. U hoeft a_0 en a_1 niet te berekenen.

Opgave 8. Bereken met behulp van een genererende functie het aantal mogelijke triples van gehele, niet-negatieve getallen (u, y, z) waarvoor geldt $u \leq y$, $u \leq z$ en $9 \leq u + y + z \leq 11$. Het is hierbij de bedoeling dat u zowel de genererende functie als het aantal mogelijkheden bepaalt. U hoeft niets aan te tonen over het toe mogen passen van een genererende functie.

Berekeningen zonder genererende functie kosten alleen tijd en leveren niets op. Je hoeft niet te bewijzen dat je een genererende functie mag gebruiken in deze situatie.

Opgave 9. Gegeven is een verzameling van 10 niet-negatieve, gehele getallen $a_1, \ldots, a_{10}$, waarbij geldt $a_i \leq 100$ $(i = 1, \ldots, 10)$. Toon aan dat het altijd mogelijk is om twee verschillende deelverzamelingen S en T van $\{1, \ldots, 10\}$ te vinden zodanig dat

$$\sum_{j \in S} a_j = \sum_{j \in T} a_j$$

Is het ook altijd mogelijk om twee disjuncte deelverzamelingen S en T te vinden?

Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Opgave 10. Bij de attractie "blikjes gooien" op de kermis staan n blikjes opgesteld, waarop je net zolang mag gooien tot ze om zijn. Persoon X heeft zijn gooivaardigheden geanalyseerd: met kans $0,5$ gooit hij mis, en met kans $0,5$ gooit hij minstens één blikje om: als er nog k blikjes staan, dan is er een kans van $\frac{1}{2k}$ dat hij er j stuks omgooit (met $j = 1, \ldots, k$). Bepaal het **verwachte aantal** keren dat X moet gooien om alles om te krijgen. U mag hierbij gebruiken dat het verwachte aantal keren dat je moet gooien om één blikje om te krijgen gelijk is aan 2.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Opgave 11. Los de onderstaande recurrente betrekking op **met behulp van een genererende functie.** Als je extra ruimte nodig hebt, ga dan door op de achterkant.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 11.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 1, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r = N + \sum_{t=1}^{r} (-1)^t s_t$$

Het aantal objecten met precies m eigenschappen is gelijk aan

$$e_m = \sum_{t=0}^{r-m} (-1)^t \binom{m+t}{t} s_{m+t}$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal

$S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$