

## Wiskundige technieken 3 (WISN202) 23 augustus 2010

Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.

Je mag een resultaat gegeven in een onderdeel van een opgave in daarnavolgende onderdelen van dezelfde opgave gebruiken, ook als je het betreffende resultaat niet zelf hebt kunnen afleiden.

### Opgave 1

Beschouw de lineaire ruimte  $C_{\text{begr}}^{\infty} ]-1, 1[$  van willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige functies op het interval  $] - 1, 1[$  waarvoor ook alle afgeleiden  $f^{(j)}$  begrensde functies op  $] - 1, 1[$  zijn. Voor  $f, g \in C_{\text{begr}}^{\infty} ]-1, 1[$  definiëren we:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

- a) Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct.  
[Opmerking: Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als  $h$  een continue functie is op  $] - 1, 1[$  zodat  $h(x) \geq 0$  voor alle  $x \in ] - 1, 1[$  en zodat  $\int_{-1}^1 h(x) dx$  convergeert en  $\int_{-1}^1 h(x) dx = 0$ , dan is de functie  $h$  constant gelijk aan 0. Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.]

Bekijk de lineaire operator  $\mathcal{D} : C_{\text{begr}}^{\infty} ]-1, 1[ \rightarrow C_{\text{begr}}^{\infty} ]-1, 1[$  gegeven door:

$$(\mathcal{D}f)(x) = (1-x^4)f''(x) - 2x^3f'(x) \quad \text{voor } f \in C_{\text{begr}}^{\infty} ]-1, 1[.$$

- b) Laat zien dat  $\mathcal{D}$  een symmetrische operator is voor het gegeven inproduct.

### Opgave 2

We onderzoeken de differentiaalvergelijking van Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \nu \geq 0 \tag{1}$$

- a) Neem aan dat  $x > 0$ , en laat  $x^r = e^{r \log x}$ . We zoeken een oplossing van (1) van de vorm  $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$  met  $a_0 = 1$  en  $r \in \mathbb{R}$ .  
Laat zien dat zo'n oplossing voldoet aan de recursie-relatie

$$((r+n)^2 - \nu^2) a_n + a_{n-2} = 0, \tag{2}$$

je mag hierbij aannemen dat  $a_j = 0$  voor  $j < 0$ .

- b) Voor welke waarden van  $r$  is er inderdaad zo'n oplossing van (1)?  
c) Laat nu  $\nu = 0$ . Laat zien dat

$$a_{2m-1} = 0, \quad a_{2m} = (-1)^m a_0 \prod_{k=1}^m \frac{1}{(r+2k)^2} \tag{3}$$

voldoet aan de recursie-relatie (2).

d) Laat zien dat

$$y(x, r) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \prod_{k=1}^m \frac{x^{2m+r}}{(r+2k)^2} \quad (4)$$

voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = r^2 x^r.$$

e) Toon aan dat  $y(x, 0)$  een oplossing is van de Besselvergelijking (1) voor  $\nu = 0$ .

### Opgave 3

- Geef alle singulariteiten van de complexe functie  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  en bepaal hun aard (essentieel of ophefbaar of pool en geef in dat geval de orde aan).
- Bereken m.b.v. de residuenstelling:  $\int_{|z|=1} \frac{1}{e^z - 1} dz$ .

### Opgave 4

Beschouw de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1} dx \quad (5)$$

- Laat zien dat deze integraal bestaat.
- Neem voor  $R > 1$  de open halve cirkelschijf  $B(R) = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0 \text{ \& } |z| < R \cup [-R, R]\}$ . Bepaal het residu van de functie  $f(z) = (z^2 + 1)^{-1} e^{2iz}$  in het punt  $i$ .
- Laat zien dat  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{2iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e^2}$ .
- Bereken nu de waarde van de integraal in (5).