DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISN202 WERD IN 2009/2010 GEGEVEN DOOR DR. P.A. ZEGELING.

Wiskundige technieken 3 (WISN202)
30 juni 2010

1. Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.
2. Je mag een resultaat gegeven in een onderdeel van een opgave in daarnavolgende onderdelen van dezelfde opgave gebruiken, ook als je het betreffende resultaat niet zelf hebt kunnen afleiden.

Opgave 1.

Beschouw de Besselvergelijking van orde ν:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0. \tag{1}$$

a) Bepaal waarden voor ν en p zodat, via een transformatie van de vorm $y(x) = x^p w(x)$, differentiaalvergelijking (1) kan worden gereduceerd tot

$$w'' + w = 0$$

b) Geef nu, voor de in a) bepaalde waarden van ν en p, twee onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ van differentiaalvergelijking (1).

Opgave 2.

We onderzoeken de complexe functie $f(z) = f(x + iy) = y^2 + ixy$ voor $z \in \mathbb{C}$.

a) Laat zien dat $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 0$

b) Geef aan voor welke $z \in \mathbb{C}$ de functie f complex differentieerbaar is (hint: gebruik o.a. de Cauchy-Riemann vergelijkingen).

Opgave 3.

Bereken de complexe integraal:

$$\oint_\gamma \frac{3}{(z+1)(z-2)} dz,$$

waarbij γ de cirkel met middelpunt 0 en straal 4 is (orientatie tegen de klok in).

Opgave (

4.) Beschouw de complexe functie $g(z) = \frac{1}{z\sin^2(z)}$ voor $z \in \mathbb{C}\backslash_{\{k\pi\}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Bepaal de aard van alle singulariteiten van g: essentieel of ophefbaar of pool (en geef in dat geval ook de orde aan).

b) Geef enkele termen van de Laurentontwikkeling van de functie g rond het singuliere punt 0, d.w.z. bepaal de coëfficiënten a_{-3} t/m a_1 in de uitdrukking:

$$\frac{1}{z\sin^2(z)} = a_{-3}z^{-3} + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 + \dots$$

c) Bepaal het residu van g in het singuliere punt 0.

d) Bereken nu $\oint_C g(z)dz$, waarbij $C = \{e^{it} | 0 \le t \le 2\pi\}$.

Opgave 5.

Beschouw de oneigenlijke integraal $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^8} dx$.

a) Neem voor $R > 1$ de open halve cirkelschijf samen met het lijnstuk $[-R, R]$:

$$\mathcal{B}(R) = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0 \& |z| < R\} \cup [-R, R].$$

Laat zien dat $\mathcal{I} = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial\mathcal{B}(R)} \frac{1}{1+z^8} dz$, waarbij $\partial\mathcal{B}(R)$ de rand van $\mathcal{B}(R)$ is.

b) Bepaal alle nulpunten van het polynoom $p(z) = 1 + z^8$.

c) Bereken nu m.b.v. onderdelen a) en b) de waarde van de integraal (I).

Opgave (

6.) Laat de functie h complex differentieerbaar zijn op ee open verzameling $G \subset \mathbb{C}$. Neem een willekeurig punt $z_0 \in G$ en beschouw de open cirkelschijf $U \subset G$ met middelpunt z_0 en straal 2, d.w.z. $U = \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| < 2\}$. Laat zien dat, als $|h(z)| \leq M, \forall z \in \partial U := \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| = 2\}$, dat dan voor de vierde afgeleide van h in z_0 geldt:

$$|h^{(4)}(z_0)| \leq \frac{3M}{2}.$$