Eerste deeltoets Wiskundige technieken 3 (WISN202) Vrijdag 18 april 2008, 9:00 – 12:00

1. Schrijf je naam, voorletters en studienummer op elk vel papier
2. Nummer alle pagina's
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent*
4. Je mag een resultaat gegeven in een onderdeel van een opgave in daarnavolgende onderdelen van dezelfde opgave gebruiken, ook als je het betreffende resultaat niet zelf hebt kunnen afleiden.

SUCCES!

Opgave 1 *(s.v.p. op een apart vel)*

We onderzoeken in deze opgave de volgende differentiaalvergelijking (DV):

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda f(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) Laat zien dat een funktie die wordt gegeven door een machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, voldoet aan DV $(\star)$ als de coëfficiënten a_n voldoen aan de recursie relatie

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \lambda)a_n \qquad \text{voor} \quad n \geq 0.$$

(b) Laat zien dat als $\lambda = N^2$ voor een geheel getal $N \geq 0$, dan is er een polynoom $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N$ dat voldoet aan DV $(\star)$ en dat niet constant nul is.

(c) Geef voor $\lambda = 9$ een polynoom $f_3(x)$ dat voldoet aan DV $(\star)$ en zo dat $f_3'(0) = 1$.

(d) Geef voor $\lambda = 36$ een polynoom $f_6(x)$ dat voldoet aan DV $(\star)$ en zo dat $f_6(0) = 1$.

Opgave 2 *(s.v.p. op een apart vel)*

Zij P de vier-dimensionale lineaire ruimte bestaande uit de polynomen $p(x)$ van de vorm $p(x) = a_0 + a_1 x + a_4 x^4 + a_5 x^5$ met $a_0, a_1, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. Definieer voor $p(x) \in \mathsf{P}$ de differentiaaloperator:

$$\mathcal{L}p(x) = (x^{-2} - x^2)p''(x) - 3xp'(x)$$

(a) Laat zien dat als $p(x) \in \mathsf{P}$ dan is ook $\mathcal{L}p(x) \in \mathsf{P}$

(b) Laat zien dat de afbeelding $\mathcal{L} : \mathsf{P} \to \mathsf{P}$ een lineaire afbeelding is.

(c) Geef de matrix van $\mathcal{L}$ t.o.v. de basis $\{1, x, x^4, x^5\}$ van P.

(d) Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren (geschreven als polynomen in P) van $\mathcal{L}$ op de lineaire ruimte P m.b.v. de matrix uit onderdeel (c).

Opgave 3 *(s.v.p. op een apart vel)*

Beschouw de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ van willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties op het interval $]-1,1[$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $]-1,1[$ zijn. Voor $f,g \in C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ definiëren we:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

(a) Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

[*Opmerking:* Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als h een continue funktie is op $]-1,1[$ zodat $h(x)\geq 0$ voor alle $x \in]-1,1[$ en zodat $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ convergeert en $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$, dan is de funktie h constant gelijk aan 0. *Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.*]

Bekijk de lineaire operator $\mathcal{D}$: $C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[) \quad\rightarrow\quad C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ gegeven door:

$$(\mathcal{D}f)(x) = (1-x^4)f''(x) - 2x^3 f'(x) \qquad \text{voor} \quad f \in C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[).$$

(b) Laat zien dat $\mathcal{D}$ een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.

Opgave 4 *(s.v.p. op een apart vel)*

Beschouw de Besselvergelijking van orde ν:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0, \quad x>0 \qquad (\diamond)$$

(a) Bepaal waarden voor ν en p zódat, via een transformatie van de vorm $y(x) = x^p w(x)$, differentiaalvergelijking $(\diamond)$ kan worden gereduceerd tot

$$w'' + w = 0.$$

(b) Geef nu, voor de in (a) bepaalde waarden van ν en p, twee onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ van differentiaalvergelijking $(\diamond)$.