Tentamen voor *Wiskundige Methoden voor fysici.* A. Henriques, April 2009.

Opgave 1 Wat is de convergentiestraal van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$? Naar welke functie convergeert deze macthreeks?
What is the radius of convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$? To which function does this power series converge?

Opgave 2 Schrijf op een machtreeksoplossing van de diferentiaalvergelijking

$$(1+z)\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \lambda f(z).$$

Find a solution of the differential equation $(1+z)f' = \lambda f$, as power series in z.

Opgave 3 Wat is het spectrum van het operator $D(f) := f''$,

$$D : \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,|\, f(x) = f(x+1)\} \to \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,|\, f(x) = f(x+1)\} \quad ?$$

What is the spectrum of the operator $D(f) := f''$, acting on the space of smooth functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(x) = f(x+1)$?

Opgave 4 Wat is de definitie van een Hilbert ruimte? *What is the definition of a Hilbert space?*

Opgave 5 Bewijs dat het operator van Legendre

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{Leg}} : L^2([-1,1]) &\to L^2([-1,1]) \\ f &\mapsto (1-x^2)f'' - 2xf', \end{aligned}$$

met domein van definitie $C^2([-1,1])$, een symmetrische operator is.
Prove that the Legendre operator

$$D_{\mathrm{Leg}}(f) := (1-x^2)f'' - 2xf'$$

is a symmetric operator when viewed as an operator on the Hilbert space $L^2([-1,1])$, with domain of definition $C^2([-1,1]) \subset L^2([-1,1])$.

Opgave 6 Geef een orthornormale basis van het Hilbert ruimte $L^2([0,1])$.
Write down an orthonormal basis of the Hilbert space $L^2([0,1])$.

Opgave 7 Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ de Fourier reeks van de functie $f(x) := \max(\cos(x), 0)$. Bereken de coefficienten a_n.
Compute the Fourier coefficients a_n,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},$$

of the function $f(x) := \max(\cos(x), 0)$.