Herkansing Wiskundige technieken 3 (WISN202) Augustus 2010

1. Schrijf je naam, voorletters en studienummer op elk vel papier
2. Nummer alle pagina's
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent*
4. Je mag een resultaat gegeven in een onderdeel van een opgave in daarnavolgende onderdelen van dezelfde opgave gebruiken, ook als je het betreffende resultaat niet zelf hebt kunnen afleiden.

SUCCES!

Opgave 1 *(s.v.p. op een apart vel)*

Beschouw de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ van willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties op het interval $]-1,1[$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $]-1,1[$ zijn. Voor $f,g \in C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ definiëren we:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

(a) Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

[*Opmerking:* Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als h een continue funktie is op $]-1,1[$ zodat $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in]-1,1[$ en zodat $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ convergeert en $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$, dan is de funktie h constant gelijk aan 0. *Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.*]

Bekijk de lineaire operator $\mathcal{D}$: $C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[) \quad\to\quad C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[)$ gegeven door:

$$(\mathcal{D}f)(x) = (1-x^4)f''(x) - 2x^3 f'(x) \qquad \text{voor} \quad f \in C^\infty_{\text{begr}}(]-1,1[).$$

(b) Laat zien dat $\mathcal{D}$ een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.

Opgave 2 *(s.v.p. op een apart vel)*

We onderzoeken de differentiaalvergelijking van Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad \nu \geq 0. \tag{1}$$

(a) Neem aan dat $x > 0$, en laat $x^r = e^{r\log x}$. We zoeken een oplossing van (1) van de vorm $y(x) = x^r \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+r}$ met $a_0 = 1$ en $r \in \mathbb{R}$.

Laat zien dat zo'n oplossing voldoet aan de recursie-relatie

$$\left((r+n)^2 - \nu^2\right)a_n + a_{n-2} = 0. \tag{2}$$

je mag hierbij aannemen dat $a_j = 0$ voor $j < 0$.

(b) Voor welke waarden van r is er inderdaad zo'n oplossing van (1)?

(c) Laat nu $\nu = 0$. Laat zien dat

$$a_{2m-1} = 0, \qquad a_{2m} = (-1)^m a_0 \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(r+2k)^2} \tag{3}$$

voldoet aan de recursie-relatie (2).

(d) Laat zien dat

$$y(x,r) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \prod_{k=1}^{m} \frac{x^{2m+r}}{(r+2k)^2} \tag{4}$$

voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = r^2 x^r.$$

(e) Toon aan dat $y(x,0)$ een oplossing is van de Besselvergelijking (1) voor $\nu = 0$.

Opgave 3 *(s.v.p. op een apart vel)*

(a) Geef alle singulariteiten van de complexe funktie $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ en bepaal hun aard (essentieel of ophefbaar of pool en geef in dat geval de orde aan).

(b) Bereken m.b.v. de residuenstelling: $\int_{|z|=1} \frac{1}{e^z - 1}\, dz$.

Opgave 4 *(s.v.p. op een apart vel)*

Beschouw de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+1}\, dx. \tag{5}$$

(a) Laat zien dat deze integraal bestaat.

(b) Neem voor $R > 1$ de open halve cirkelschijf $B(R) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0 \,\&\, |z| < R \cup [-R, R]\}$.
Bepaal het residu van de functie $f(z) = (z^2+1)^{-1} e^{2iz}$ in het punt i.

(c) Laat zien dat $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e^2}$.

(d) Bereken nu de waarde van de integraal in (5).