Eerste deeltoets Wiskundige technieken 3 (WISN202)
Maandag 19 april 2010, 9:00 – 12:00

1. Schrijf je naam, voorletters en studienummer op elk vel papier.
2. Nummer alle pagina's.
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent!*
4. Je mag een resultaat gegeven in een onderdeel van een opgave in daarnavolgende onderdelen van dezelfde opgave gebruiken, ook als je het betreffende resultaat niet zelf hebt kunnen afleiden.

SUCCES!

Opgave I *(s.v.p. op een apart vel)*

Zij **P** de 3-dimensionale ruimte van polynomen $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ van graad kleiner dan 3 met coefficienten in $\mathbb{R}$. Op deze ruimte geven we het inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-4x}\,dx. \tag{1}$$

en de differentiaaloperator

$$\mathcal{L} = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-4x)\frac{\partial}{\partial x},$$

d.w.z.

$$\mathcal{L}\,p(x) = xp''(x) + (1-4x)p'(x) \quad \text{voor } p \in \mathbf{P}.$$

[N.B. Je hoeft niet te bewijzen dat (1) een inproduct is en dat L lineair is.]

1. Laat zien dat als $p(x) \in \mathbf{P}$ dan ook $\mathcal{L}\,p(x) \in \mathbf{P}$.
2. Toon aan dat de operator $\mathcal{L}$ *symmetrisch* is t.o.v. het inproduct (1).
3. Bepaal de *eigenfuncties* van de operator $\mathcal{L}$ in de ruimte **P**.
4. Toon aan dat de eigenfuncties *orthogonaal* zijn t.o.v. het inproduct (1).

Opgave II *(s.v.p. op een apart vel)*

Beschouw in deze opgave de differentiaalvergelijking (DV)

$$\left(1-x^2\right)f''(x) + 2xf'(x) + \lambda f(x) = 0. \tag{2}$$

1. Laat zien dat een functie die wordt gegeven door een machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voldoet aan DV (2) dan en slechts dan als a_n voldoet aan de recursierelatie:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 - 3n - \lambda)a_n.$$

2. Laat zien dat we elke machtreeks $f(x)$ die voldoet aan DV (2) kunnen schrijven als de som $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$, waarbij f_0 een *even* en f_1 een *oneven* machtreeks is die afzonderlijk ook voldoet aan DV (2).

3. Bepaal voor $\lambda = 4$ een polynoom $p_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ van graad 4 met $a_4 = 1$ dat voldoet aan DV (2).

4. Laat zien dat voor $\lambda = N^2 - 3N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ er polynomen p_N van graad N bestaan (d.w.z. $a_N \neq 0$) die voldoen aan DV (2).

5. Bepaal voor $\lambda \neq N^2 - 3N$ de *even* machtreeks $f_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m}$ die voldoet aan DV (2) (een formeel bewijs van de correctheid van de gevonden vorm voor de a_{2m} is niet vereist).

6. Bepaal voor $\lambda \neq N^2 - 3N$ de convergentiestraal van de machtreeks $f_0(x)$ die je hebt bepaald in onderdeel 5. van deze opgave.

Opgave III *(s.v.p. op een apart vel)*

We bekijken in deze opgave de lineaire ruimte $C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[)$ bestaande uit de willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties f op het open interval $]0,4[$.

1. Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}dx$ convergeert.

2. Laat zien dat voor alle $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[)$ de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^4 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{4x - x^2}}dx$ convergeert.

3. Voor $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[)$ definiëren we $\displaystyle\langle f, g\rangle = \int_0^4 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{4x - x^2}}dx$.

   Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

   Opmerking: Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als $h \in C(]0,4[)$, dan:
   a) $h(x) > 0 \quad \forall x \in]0,4[\ \Rightarrow \int_0^4 h(x)dx > 0$,
   b) $\int_0^4 h(x)dx = 0 \Rightarrow h$ is constant en gelijk aan 0.

   Neem de differentiaaloperator:

   $$(\mathcal{L}f)(x) = (4x - x^2)f''(x) + (2 - x)f'(x) \qquad \text{voor} \quad f \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[).$$

4. Bewijs dat $\mathcal{L}$ een *lineaire* operator is van $C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[)$ naar $C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]0,4[)$.

5. Laat zien dat $\mathcal{L}$ een *symmetrische* operator is voor het inprodukt uit onderdeel 3. van deze opgave.

EINDE