

**Opgave 1** Welke van de volgende reeksen zijn convergent? absoluut convergent? divergent? [3pt]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh(k)}{e^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \quad (\text{met } i = \sqrt{-1})$$

**Opgave 2** Bereken de convergentiestralen van de volgende twee machtrekken: [4pt]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{met} \quad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}. \quad [2pt]$$

Op welke deelverzameling van  $\mathbb{R}$  definieert de volgende machtrek een functie:  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ ? [2pt]  
Met andere woorden, voor welke  $x \in \mathbb{R}$  is de reeks  $h(x)$  convergent?

**Opgave 3** Wat is de machtreksoptwikkeling van de functie  $f(x) = \frac{\log(x-1)}{x}$ ? [2pt]

**Opgave 4** De functie  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  is een oplossing van de differentiaalvergelijking [3pt]

$$f''(x) = -2f(x).$$

Gegeven dat  $a_0 = 1$  en  $a_1 = 0$ , wat is de algemene formule voor  $a_n$ ? [2pt]  
Druk  $f(x)$  uit in termen van de klassieke goniometrische functies sin en cos. [1pt]

**Opgave 5** Welke van de volgende verzamelingen zijn vektor ruimtes? [4pt]

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}, \quad \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continu}\}, \quad \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}. \quad [1.5pt]$$

Wat is de definitie van een lineaire afbeelding? [1pt]  
Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair?

$$f(x) \mapsto f'(x), \quad f(x) \mapsto \sin(x)f(x), \quad f(x) \mapsto f''(x) + x^2 f(x). \quad [1.5pt]$$

**Opgave 6** Bereken het spectrum van de differentiaaloperator  $f \mapsto f'$  op de ruimte [3pt]

$$\{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

**Opgave 7** Laat zien dat de functies  $e^{inx}$  loodrecht op elkaar staan ten opzichte van het inproduct [2pt]

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad [1pt]$$

Wat is de norm van de functie  $e^{inx}$ ? [1pt]