Deeltentamen *Wiskundige Techn. 3* (WISN202).

A. Henriques, April 2013.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

[3pt] **Opgave 1** Bereken de convergentiestralen van de volgende drie machtreeksen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n+2)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{2n}+1}x^n.$$

[3pt] **Opgave 2** Bereken de machtreeksontwikkelingen van de volgende drie functies:

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad g(x)=\sin^2(x) \qquad h(x)=\frac{1}{2x-3}.$$

Hint: Je mag de formule $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$ gebruiken.

[3pt] **Opgave 3** Zij $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ een functie die aan de volgende differentiaalvergelijking voldoet:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{f(x)}{1-x} \\ f(0)=1 \end{cases} \qquad (*)$$

[2pt] Bereken de coëfficienten a_0, a_1, a_2, a_3 van de machtreeks.
[1pt] Wat is het functievoorschrift van de functie f die aan $(*)$ voldoet?

[3pt] **Opgave 4** Zij $\mathsf{Pol}_{\leq 3}$ de ruimte van polynomen van graad ≤ 3.
De operator $F:\mathsf{Pol}_{\leq 3}\to\mathsf{Pol}_{\leq 3}$ is gegeven door

$$F(f):=f+xf'+f'''.$$

[1pt] 1) Geef de matrix van F ten opzichte van de basis $\{1,x,x^2,x^3\}$ van $\mathsf{Pol}_{\leq 3}$.
[2pt] 2) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van F.

[3pt] **Opgave 5** Juist of fout (met uitleg)?

- $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ :\ f(0)=0 \text{ en } f(1)=1\}$ is een vector ruimte.
- $\{f:[0,1]\to\mathbb{C}\ :\ \int_0^1|f(x)|dx\leq 1\}$ is een vector ruimte.
- De afbeelding $F:f(x)\mapsto f'(x)+f(x)+1$ is lineair.
- De afbeelding $F:f(x)\mapsto \sin(x)f(x)$ is lineair.
- De functies e^x, $\sinh(x)$, en $\cosh(x)$ zijn lineair onafhankelijk.
- De functies $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vormen een basis van de ruimte van 2π-periodieke functies.

[3pt] **Opgave 6** Laat zien dat de Hermite operator

$$D_{Her}(f):=(\partial^2/\partial x^2-2x\partial/\partial x-1)(f)$$

self-adjoint is ten opzichte van het inproduct

$$\langle f,g\rangle:=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{g}(x)e^{-x^2}dx.$$