Tentamen Wiskundige Technieken 3

5 november 2015, 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op elke vraag op een APART BLAD.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (25 pt)
Zij $V = \{f \in C^\infty([0,1]) \mid f(0) = 0\,,\, f(1) = 0\}$ en $L : V \to V$ gedefinieerd door $(Lf)(x) = f''(x) + f(x)$. Er is gegeven dat $C^\infty([0,1])$ een lineaire ruimte is.

(a) (5 pt) Laat zien dat V voldoet aan alle eisen van een lineaire deelruimte.

(b) (13 pt) Bepaal alle eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ van L.

(c) (7 pt) Bepaal de bijbehorende eigenfuncties $u_1(x), u_2(x), \ldots$, die zodanig zijn dat $< u_k, u_k >= 1$ voor alle $k = 1, 2, \ldots$, met $< .,. >$ het standaard inproduct op $C^\infty([0,1])$.

Opgave 2 (25 pt)
Zij $f(x)$ de functie die op $[-1,1]$ gedefinieerd wordt door:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{als } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x+1 & \text{als } 0 \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

en buiten $[-1,1]$ periodiek wordt voortgezet.

(a) (17 pt) Maak een schets van $f(x)$. Omdat $f(x)$ even is, kan $f(x)$ geschreven worden als een *cosinusreeks*. Bereken de coëfficienten van deze reeks.

(b) (8 pt) Bepaal de waarde van

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\,,$$

door de waarde $x = 1$ in te vullen in de cosinusreeks voor $f(x)$.

Opgave 3 (25 pt)
In deze opgave hebben de functies $f(x)$ en $g(x)$ een Fourier-getransformeerde. We schrijven $\widehat{f}(s) = \mathcal{F}(f(x))(s)$ en $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(s))(x)$. Let op dat in deze opgave de variabele t de rol van een parameter speelt!

(a) (5 pt) Zij $t \in \mathbb{R}$. Laat zien dat $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(s)e^{its}) = f(x+t)$

Beschouw de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

met beginwaarden:

$$\psi(x,0) = g(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Zij $\widehat{\psi}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)e^{-isx}\mathrm{d}x$ de Fourier-getransformeerde in de x-variabele van $\psi(x,t)$. Neem aan $\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x,t) = 0$ en $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = 0$.

(b) (5 pt) Laat zien dat $\mathcal{F}(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}) = \frac{\partial^2\widehat{\psi}(s,t)}{\partial t^2}$ en $\mathcal{F}(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}) = -s^2\widehat{\psi}(s,t)$.

(c) (5 pt) Bepaal een differentiaalvergelijking voor $\widehat{\psi}(s,t)$ door links en rechts van vergelijking (1) de Fourier-getransformeerde te nemen. Geef de algemene oplossing $\widehat{\psi}(s,t)$ van deze vergelijking.

(d) (5 pt) Bepaal de beginwaarden voor $\widehat{\psi}(s,t)$ en laat zien dat de oplossing uit (c) die hieraan voldoet, gegeven wordt door $\widehat{\psi}(s,t) = \hat{g}(s)\cos(st)$.

(e) (5 pt) Geef de oplossing $\psi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi}(s,t))$ van (1), (2). Verifieer dat deze oplossing voldoet aan de vergelijking en aan de beginwaarden.

Opgave 4 (25 pt)

(a) (5 pt) Laat zien dat als $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, dan is $\widehat{f}(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

(b) (5 pt) Zij $\widehat{g}(s)$ de Fourier-getransformeerde van $g(t)$. Gebruik de convolutieformule

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(s)\widehat{v}(s))(t) = u * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(t-x)\mathrm{d}x,$$

om een uitdrukking te vinden voor $\mathcal{F}^{-1}(\frac{\widehat{g}(s)}{1+s^2})$

(c) (10 pt) Neem nu $\widehat{g}(s) = \frac{1}{1+s^2}$ en bereken met behulp van (b) $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{(1+s^2)^2})$. Hints: neem eerst $t \geq 0$ en gebruik later een even/oneven eigenschap van Fourier-transformaties. Splits het integratiedomein op.

(d) (5 pt) Geef de formule van Plancherel. Gebruik deze formule om $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s$ te berekenen.