2E DEELTOETS WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3

12 oktober 2015, 15.30-17.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op elke vraag op een APART BLAD.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (60 pt)
Zij $V = \{f \in C^\infty([0,1]) \,|\, f(0) = 0\,,\ f'(1) = 0\}$ en $L : V \to V$ gedefinieerd door $(Lf)(x) = f''(x)$. Er is gegeven dat $C^\infty([0,1])$ een lineaire ruimte is.

(a) (10 pt) Laat zien dat V voldoet aan alle eisen van een lineaire deelruimte.

(b) (10 pt) Is $\lambda = 0$ een eigenwaarde van L?

(c) (15 pt) Onderzoek of L positieve eigenwaarden heeft, en zo ja, bepaal deze. Doe dit door te stellen $\lambda = \mu^2$, met $\mu > 0$.

(d) (15 pt) Onderzoek of L negatieve eigenwaarden heeft, en zo ja, bepaal deze. Doe dit door te stellen $\lambda = -\mu^2$, met $\mu > 0$.

(e) (10 pt) Schets de eigenfuncties die horen bij de grootste en de op één na grootste eigenwaarde.

Opgave 2 (40 pt)
Zij $W = \{f \in C^\infty([-1,1]) \,|\, f(-1) = 0\,,\ f(1) = 0\}$ en $<\,,\,>$ een inproduct op W. Een operator $A : W \to W$ heet *symmetrisch* ten opzichte van dit inproduct als $< Af, g > = < f, Ag >$, voor alle $f \in W$ en $g \in W$.

(a) (10 pt) Laat zien dat

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} x f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$$

geen inproduct definieert op $C^\infty([-1,1])$ (en dus ook niet op W).

(b) (10 pt) Zij $\alpha(x)$ een functie met als domein $[-1,1]$ en waarvoor geldt dat $\alpha(x) > 0$ voor alle $x \in [-1,1]$. Laat zien dat

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \alpha(x) f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

wel een inproduct definieert op $C^\infty([-1,1])$.

(c) (10 pt) Laat zien dat $B : W \to W$ gedefinieerd door $(Bf)(x) = f'(x)$ niet symmetrisch is ten opzichte van het standaard inproduct. Doe dit door twee functies $f \in W$ en $g \in W$ te geven die niet aan de symmetrie-eis voldoen.

(d) (10 pt) Laat zien dat $A : W \to W$ gedefinieerd door $(Af)(x) = (\alpha(x) f(x))''$ symmetrisch is ten opzichte van het inproduct uit onderdeel (b). **Hint:** ga afgeleides van producten van functies niet uitwerken, maar laat deze zo veel mogelijk staan.