Wiskundige Technieken 3 (jaar onbekend) 1/2

Opgave 1 (differentiaalvergelijking, 6 pt). (i) Bereken de algemene oplossing $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de differentiaalvergelijking

$$\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 2u(t) = 0. \tag{1}$$

Laat zien dat je gevonden functie inderdaad de differentiaalvergelijking oplost.

(ii) Vind een oplossing van (1) die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) = 0.$$

Opgave 2 (differentiaalvergelijking, machtreeks, 11 pt). (i) Zij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ een rij van reële getallen. Vind formules voor $a_2, a_3, \ldots$ in termen van a_0, a_1, zó, dat de functie

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2}$$

de differentiaalvergelijking

$$u''(x) = x^2 u(x) \tag{3}$$

oplost.

Opmerking: Sommige van de getallen $a_2, a_3, \ldots$ kunnen gelijk aan 0 zijn.

Hint: Voor elke $\ell \geq 2$ vind een relatie tussen $a_{\ell+2}$ en $a_{\ell-2}$ door (2) in (3) in te vullen.

(ii) Vind een rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ waarvoor de functie u (zoals in (2)) de vergelijking (3) oplost en aan de volgende beginvoorwaarden voldoet:

$$u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0.$$

(iii) Bewijs voor de gevonden rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de machtreeks $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergeert.

Opgave 3 (lineaire deelruimte, eigenwaarden van operator, 12 pt). We schrijven $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ voor de verzameling van alle functies van $\mathbb{N}_0$ naar $\mathbb{C}$, d.w.z. rijen van complexe getallen. We definiëren de verzameling

$$\ell^1 := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \text{De rij } \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\right)_{N\in\mathbb{N}_0} \text{ convergeert.} \right\}.$$

(i) Bewijs dat ℓ^1 een lineaire deelruimte van de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ is.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ een complexe vectorruimte is.

(ii) We definiëren de afbeelding

$$T : \ell^1 \to \ell^1, \qquad (T(a))_n := a_{n+1}.$$

(We hebben bijvoorbeeld $T\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.) Bereken de verzameling van alle eigenwaarden van T.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat T lineair is.

Hint: Probeer om voor een gegeven $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenvector a van T bij de eigenwaarde λ te construeren door de vergelijking

$$\left(a_1, a_2, \ldots\right) = Ta = \lambda a = \left(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots\right)$$

recursief op te lossen.

Let op! Zo'n a is alleen een eigenvector als hij ongelijk aan 0 is en in ℓ^1 ligt.

Opgave 4 (Fourier-coëfficiënten, 13 pt). We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als de 2π-periodieke uitbreiding van de functie

$$[-\pi, \pi) \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(Dit is de unieke 2π-periodieke functie die op het interval $[-\pi, \pi)$ overeenkomt met (4).

(i) Teken de beperking van f op het interval $[-3\pi, 3\pi)$.

(ii) Wat is $f(2\pi)$?

(iii) Bereken $\widehat{f}_k$, de k-de Fourier-coëfficiënt van f. Laat details van je berekening zien.

Let op! Je moet het geval $k = 0$ apart bekijken omdat delen door nul niet mag.

(iv) Laat zien dat voor elke $x \in (-\pi, \pi)$ de Fourierreeks $\left(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k e^{ikx}\right)_{N \in \mathbb{N}_0}$ naar $f(x)$ convergeert.

Hint: Gebruik een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 5 (Fourier-getransformeerde, 13 pt). Zij $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$. We definiëren de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n e^{-x}, & \text{als } x \geq 0, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(i) Teken de functies f_0 en f_1.

(ii) Laat zien dat de Fourier-getransformeerde van f_n gegeven wordt door

$$\widehat{f}_n(\xi) = \frac{n!}{(1 + i\xi)^{n+1}}.$$

Laat details van je berekening zien.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat de Fourier-getransformeerde van f_n bestaat.

Hint: Bereken eerst $\widehat{f}_0$ en gebruik dan een stelling uit het hoorcollege.

2/2

(iii) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{n+1}}.$$

Hint: Gebruik de vorige deelopgave en een stelling uit het hoorcollege die iets over $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$ zegt.

(^ plancherel $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$)

Opgave 6 (warmtevergelijking, 6 pt). We schrijven (t, x) voor de standaard-coördinaten in $\mathbb{R}^2$. Vind een oplossing $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de warmtevergelijking

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

die aan de beginvoorwaarde

$$u(t = 0, x) = e^{-\frac{x^2}{4}}, \qquad \text{voor elke } x \in \mathbb{R},$$

voldoet. Laat zien dat u inderdaad de warmtevergelijking oplost.