

Eerste deeltentamen Wiskundige Technieken 3
12-10-2022, 14.00-16.00 uur

- Je mag gebruik maken van alle handouts, college aantekeningen en dictaat.
- Je mag geen gebruikmaken van een computer of grafische rekenmachine.
- Leg in woorden uit wat je doet, het geven van alleen formules is niet voldoende.
- Vergeet niet je naam, studentnummer te vermelden op je uitwerkingen.
- Totaal aantal punten 30. Cijfer voor het tentamen is het aantal behaalde punten gedeeld door 3.

Succes

1. (a) (7 punten) Vind de algemene oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 8y(t), \quad \text{en} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t). \quad (1)$$

- (b) (3 punten) Bepaal de oplossing die voldoet aan $x(0) = y(0) = 4$.

2. (Elk onderdeel 2 punten) We willen de volgende differentiaalvergelijking oplossen door een machtreeks $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in te vullen:

$$f''(x) - xf(x) = 0. \quad (2)$$

- (a) Leid een recursie relatie af voor de coëfficiënten a_k . Hint: Druk a_{k-1} uit in a_{k+2} .
- (b) Toon aan dat $a_2 = 0$.
- (c) Laat zien dat $a_{3k+2} = 0$ voor $k = 1, 2, \dots$
- (d) Toon aan dat a_{3k} bepaald wordt door a_0 en dat a_{3k+1} bepaald wordt door a_1 .
- (e) Kies $a_0 = 1$ en $a_1 = 0$ en bepaal de bijbehorende machtreeks.
- (f) Bewijs dat de reeks die je bij (e) gevonden hebt voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergeert.

3. Zij V de ruimte van reële functies die minimaal tweemaal differentieerbaar zijn.

- (a) (3 punten) Laat W de deelruimte van V zijn van functies $f(x)$ waarvoor geldt dat $f'(n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Toon aan dat W een lineaire deelruimte is van V .
- (b) (1 punt) Zij $M : V \rightarrow V$ de afbeelding die als volgt gedefinieerd is

$$M(f(x)) = xf(x).$$

Toon aan dat $M(f(x)) \in V$, voor elke $f(x) \in V$.

- (c) (2 punten) Bewijs dat M een lineaire afbeelding is op V .
- (d) (2 punten) Definieert M ook een lineaire afbeelding van $W \rightarrow W$?