Wiskundige Technieken 1
Uitwerkingen Tentamen 3 november 2014

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort; signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken; maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid); gebruikt verwerpelijke notaties
2pt	weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht; mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.; herkent evident foute tussenresultaten niet; toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. Voor de hoek θ tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ geldt

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}\right).$$

Het inproduct en de lengtes zijn gemakkelijk te bepalen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= 1 \cdot 0 + -1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = -2, \\
\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\
\|\mathbf{v}\| &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

en dus volgt:

$$\begin{aligned}
\theta &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

2. a. We weten dat $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. We controleren of de twee gegeven definities aan deze regel voldoen:

$$\begin{aligned}
\cos x + \mathrm{i}\sin x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.
\end{aligned}$$

We zien dat het invullen van de definities de bekende regel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ opleveren, dus komen de gegeven definities inderdaad overeen met de gebruikelijke definitie van $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

b. We vullen $x = 2a$ in in de definitie van $\sin x$ en gebruiken het merkwaardig product $y^2 - z^2 = (y + z)(y - z)$:

$$\begin{aligned}
\sin 2a &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^2}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)}{2\mathrm{i}} \\
&= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}} \\
&= 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}} = 2\cos a \sin a.
\end{aligned}$$

3. We berekenen de afgeleiden van $f(x) = \sin^2 x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x, & f(0) = 0, \\ f'(x) &= \sin 2x, & f'(0) = 0, \\ f''(x) &= 2\cos 2x, & f''(0) = 2, \\ f'''(x) &= -4\sin 2x, & f'''(0) = 0, \\ f''''(x) &= -8\cos 2x, & f''''(0) = -8, \end{aligned}$$

waarbij we de uitdrukking voor $f'(x)$ hebben vereenvoudigd met de bekende verdubbelingsformule van de sinus (deze formule heb je bij opgave 2b zelf afgeleid!). Het vierde orde Taylorpolynoom van $f(x)$ is dus:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4. \end{aligned}$$

De gevraagde benadering is $\sin^2(1) \approx P_4(1) = \frac{2}{3}$.

Alternatieve oplossing:
Hoewel het bepalen van vier afgeleiden in dit geval niet veel werk is, kun je je afvragen of er niet een snellere manier is. We laten hier een voorbeeld van zo'n snellere manier zien waarbij we ervan uitgaan dat je de Taylorontwikkeling van $\sin x$ met steunpunt 0 uit het hoofd kent. Omdat we zoeken naar het vierde orde Taylorpolynoom van $\sin^2(x)$, gebruiken we het vierde orde Taylorpolynoom van $\sin x$:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= (\sin x)(\sin x) \\ &\approx \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}. \end{aligned}$$

De laatste term mogen we negeren (we zoeken slechts het vierde orde Taylorpolynoom) en dus vinden we $P_4(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4$.

4. Eerst nemen we de breuken samen:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \log x}{(x-1)\log x}.$$

Het invullen van $x = 1$ levert de onbepaalde vorm $\left[\frac{0}{0}\right]$ op. De stelling van l'Hôpital zegt dat deze limiet gelijk is aan

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\log x + x - 1},$$

mits deze laatste limiet bestaat. Het invullen van $x = 1$ levert opnieuw de onbepaalde vorm $\left[\frac{0}{0}\right]$ op, dus kunnen we niet concluderen dat deze tweede limiet bestaat. De stelling van l'Hôpital zegt dat de tweede limiet gelijk is aan

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log x + \frac{x}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2 + \log x},$$

mits deze limiet bestaat. Deze laatste limiet bestaat wel: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{2+\log x} = \frac{1}{2}$. Omdat de laatste limiet bestaat, bestaat de tweede limiet dus ook en dus bestaat de oorspronkelijke limiet ook. Bovendien hebben de drie limieten dezelfde waarde en dus mogen we concluderen dat:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

5. Allereerst moeten we bepalen waar deze grafieken elkaar snijden. We lossen op:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \sin^2 x, \\ \tan^2 x &= 1, \\ \tan x = -1 \quad &\text{of} \quad \tan x = 1, \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad &\text{of} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \end{aligned}$$

waarbij k een geheel getal is. De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken tussen twee opeenvolgende snijpunten hangt niet af van de gekozen snijpunten (dit geldt in dit geval, maar in het algemeen uiteraard niet!), dus kiezen we de snijpunten $-\frac{\pi}{4}$ en $\frac{\pi}{4}$. Vervolgens moeten we bepalen welke van de twee grafieken hoger ligt op het interval $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Omdat de grafieken elkaar verder niet snijden op dit interval en omdat het twee continue functies betreft is het voldoende om slechts één punt in dit interval te proberen. Kiezen we $x = 0$, dan volgt $\cos^2(0) = 1$ en $\sin^2(0) = 0$, dus geldt $\cos^2 x \geq \sin^2 x$ op dit interval. De oppervlakte wordt dus gegeven door de integraal:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Met de bekende verdubbelingsformule van de cosinus vinden we:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

6. a. Merk allereerst op dat $\cos^7 x = \cos x \cdot \cos^6 x = \cos x \left(\cos^2 x\right)^3 = \cos x \left(1 - \sin^2 x\right)^3$. We berekenen de integraal met behulp van de substitutieregel ($u = \sin x$, $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned} \int \cos^7 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos x \left(1 - \sin^2 x\right)^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \int \left(1 - u^2\right)^3 \, \mathrm{d}u = \int -u^6 + 3u^4 - 3u^2 + 1 \, \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{7}u^7 + \frac{3}{5}u^5 - u^3 + u + C \\ &= -\frac{1}{7}\sin^7 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \sin^3 x + \sin x + C. \end{aligned}$$

b. We gebruiken partiële integratie (met $U = \arcsin \frac{x}{2}$ en $\mathrm{d}V = x \, \mathrm{d}x$, dus $\mathrm{d}U = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$ en $V = \frac{1}{2}x^2$):

$$\int x \arcsin \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Voor de integraal in het rechterlid gebruiken we de inverse substitutie $x = 2\sin u$ (dus $\mathrm{d}x = 2\cos u \, \mathrm{d}u$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{4\sin^2 u}{\sqrt{4 - 4\sin^2 u}} \cdot 2\cos u \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{4\sin^2 u}{2\cos u} \cdot 2\cos u \, \mathrm{d}u \\ &= 2\int \sin^2 u \, \mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u \, \mathrm{d}u \\ &= \int 1 - \cos 2u \, \mathrm{d}u \\ &= u - \frac{1}{2}\sin 2u + C_1 = u - \sin u \cos u + C_1. \end{aligned}$$

Nu moeten we $\sin u \cos u$ uitdrukken in termen van x. Bedenk dat $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos u$ (dit hadden we gebruikt in de noemer van de integrand), dan volgt:

$$\sin u \cos u = \frac{2\sin u}{2} \cdot \frac{2\cos u}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = \frac{1}{4}x\sqrt{4 - x^2}.$$

Dus volgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x &= u - \sin u \cos u + C_1 \\ &= \arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}x\sqrt{4-x^2} + C_1\end{aligned}$$

en dus is de gevraagde integraal:

$$\begin{aligned}\int x \arcsin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\arcsin\frac{x}{2} - \left(\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}x\sqrt{4-x^2} + C_1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x\sqrt{4-x^2} + C,\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = -C_1$ kiezen.

7. a. Bedenk dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$. We berekenen de gevraagde afgeleide met de kettingregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| &= \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \tan x}\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \\ &= \frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\end{aligned}$$

b. We splitsen de integraal in twee stukken en lossen ze apart op:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

De eerste integraal lossen we op met de substitutieregel (neem $u = x^2+1$, dan geldt $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{u} + C_1 = \sqrt{x^2+1} + C_1.\end{aligned}$$

De tweede integraal vergt wat meer werk. We gebruiken de inverse substitutie $x = \tan w$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 w}\,\mathrm{d}w$:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sqrt{\tan^2 w+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 w}\,\mathrm{d}w \\ &= \int\cos w\cdot\frac{1}{\cos^2 w}\,\mathrm{d}w = \int\frac{1}{\cos w}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Deze laatste integraal kunnen we berekenen dankzij onderdeel a:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\cos w}\,\mathrm{d}w = \log\left|\frac{1}{\cos w} + \tan w\right| + C_2.$$

Nu moeten we alles uitdrukken in termen van x. Uit de gelijkheid $1+\tan^2 w = \frac{1}{\cos^2 w}$ (deze hadden we gebruikt in de integrand) volgt $\frac{1}{\cos w} = \sqrt{1+\tan^2 w} = \sqrt{1+x^2}$ en dus:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \log\left|\frac{1}{\cos w} + \tan w\right| + C_2 \\ &= \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C_2 \\ &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C_2,\end{aligned}$$

waar we de absoluutstrepen mogen weglaten omdat $\sqrt{x^2+1} > x$ geldt en dus $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. De gevraagde integraal is dus:

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C,\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = C_1 + C_2$ kiezen.

8. a. We moeten eerst u' uitdrukken in termen van y en y'. Differentieer beide leden in de identiteit $u = \frac{1}{y^2}$ naar t:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{y^2} \\ u' &= \frac{-2}{y^3} \cdot y'. \end{aligned}$$

Nu gaan we de Bernoullivergelijking herschrijven:

$$\begin{aligned} y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3 &= 0, \\ y' + ty &= -\mathrm{e}^{t^2} y^3, \\ \frac{-1}{y^3} \cdot y' - \frac{t}{y^2} &= \mathrm{e}^{t^2}, \\ \frac{1}{2} u' - tu &= \mathrm{e}^{t^2}, \\ u' - 2tu &= 2\mathrm{e}^{t^2}. \end{aligned}$$

b. We lossen de vergelijking op met scheiding van variabelen:

$$\begin{aligned} u' - 2tu &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= 2tu, \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} &= 2t\,\mathrm{d}t, \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int 2t\,\mathrm{d}t, \\ \log|u| &= t^2 + C_1, \\ u &= \mathrm{e}^{t^2+C_1} = C\mathrm{e}^{t^2}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = \mathrm{e}^{C_1}$ kiezen.

c. Uit $u = \frac{1}{y^2}$ volgt $y = \pm\frac{1}{\sqrt{u}}$ en dus is de oplossing:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{(2t+k)\mathrm{e}^{t^2}}} = \pm\left((2t+k)\mathrm{e}^{t^2}\right)^{-1/2} = \pm u^{-1/2}.$$

Bekijk voorlopig de positieve oplossing. We drukken de drie termen in het linkerlid van de Bernoullivergelijking uit in termen van t en $u(= (2t+k)\mathrm{e}^{t^2})$:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2} u^{-3/2} \cdot \left(2\mathrm{e}^{t^2} + 2t(2t+k)\mathrm{e}^{t^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} u^{-3/2} \cdot \left(2\mathrm{e}^{t^2} + 2tu\right) = -\mathrm{e}^{t^2} u^{-3/2} - tu^{-1/2}, \\ ty &= tu^{-1/2}, \\ \mathrm{e}^{t^2} y^3 &= \mathrm{e}^{t^2} u^{-3/2}. \end{aligned}$$

De som van deze drie termen is:

$$y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3 = -\mathrm{e}^{t^2} u^{-3/2} - tu^{-1/2} + tu^{-1/2} + \mathrm{e}^{t^2} u^{-3/2} = 0,$$

wat betekent dat deze oplossing voldoet aan $y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3 = 0$.
Vervolgens moeten we nagaan dat de negatieve oplossing ook voldoet. Dat kan door opnieuw alles te differentiëren, maar het kan ook sneller. Noem z de negatieve oplossing en y de positieve oplossing (waarvan we dus al weten dat $y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3 = 0$ geldt), dan geldt: $z' = -y'$, $z = -y$ en $z^3 = -y^3$, dus:

$$\begin{aligned} z' + tz + \mathrm{e}^{t^2} z^3 &= -y' - ty - \mathrm{e}^{t^2} y^3 \\ &= -\left(y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3\right) = 0. \end{aligned}$$

We concluderen dat de algemene oplossing inderdaad voldoet.

9. Het domein van f is $\mathbb{R}$, omdat $f(x)$ het product is van een lineaire term en een e-macht en beide factoren voor alle x bestaan. Gevolg hiervan is dat f geen verticale asymptoten heeft. We gaan nog na of f horizontale asymptoten heeft (omdat f een exponentiële functie bevat, zijn er geen schuine asymptoten). Aangezien de exponentiële functie wint van een veelterm, kunnen we concluderen dat

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x} = \infty.$$

De eerste limiet vertelt ons dat $y = 0$ een horizontale asymptoot is. De tweede limiet vertelt ons dat er geen andere horizontale asymptoot is. Voordat we naar de afgeleiden gaan kijken, bepalen we ook nog de snijpunten met de coördinaatassen. Het snijpunt met de y-as is $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Voor snijpunten met de x-as lossen we $f(x) = 0$ op:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x} &= 0,\\
\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x = 0 \quad &\text{of} \quad \mathrm{e}^{-2x} = 0,\\
\frac{1}{4} = \frac{3}{4}x \quad &\quad \text{geen oplossingen}\\
x = \frac{1}{3} &
\end{aligned}$$

wat betekent dat er één snijpunt met de x-as is, namelijk $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Vervolgens bepalen we de afgeleide:

$$f'(x) = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x} - 2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x} = \left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

De afgeleide bestaat overal (dit komt overeen met onze eerdere conclusie dat f geen verticale asymptoten heeft). Het oplossen van $f'(x) = 0$ gaat op dezelfde manier als $f(x) = 0$ en betekent in dit geval dat de oplossing wordt gegeven door $-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}x = 0$, ofwel $x = \frac{5/4}{3/2} = \frac{5}{6}$. De grafiek van f heeft dus één kritiek punt, namelijk $\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{24}\mathrm{e}^{-5/3}\right)$, waarvan we nog moeten nagaan of het een dal (minimum) of een top (maximum) betreft. Omdat de afgeleide negatief is voor $x < \frac{5}{6}$ en positief voor $x > \frac{5}{6}$, volgt dat het kritiek punt een dal is.

Daarna bekijken we de tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 2\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-2x} = (4-3x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Buigpunten van f vinden we door $f''(x) = 0$ op te lossen. Dit gaat op dezelfde manier als $f(x) = 0$ en $f'(x) = 0$, en in dit geval vinden we $4 - 3x = 0$, ofwel $x = \frac{4}{3}$. Het buigpunt is dus $\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-8/3}\right)$. Voor $x < \frac{4}{3}$ is de tweede afgeleide positief en voor $x > \frac{4}{3}$ is de tweede afgeleide negatief.

We vatten alles samen in onderstaand schema:

x		0		1/3		5/6		4/3	
$f(x)$	+	+	+	0	−	−	−	−	−
$f'(x)$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	+	+	+	+	0	−
						dal		buigpunt	

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$

De grafiek ziet er als volgt uit: