WISN101 Hertentamen 3 jan 2013

① Enerzijds: $e^{2xi} = \cos(2x) + i\sin(2x)$

Anderzijds: $e^{2xi} = (e^{xi})^2 = (\cos x + i \sin x)^2$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\cos x \sin x$$

Vergelijk reele en imaginaire delen van beide, geeft

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

en

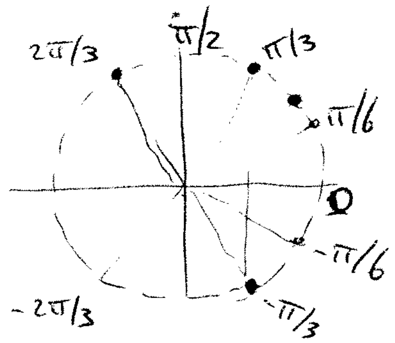
$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$

---

② Het helpt misschien om eerst $z^2 = t$ te noemen; de vgl. $t(t-1) = -1$ heeft oplossingen $t = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i = e^{\pm i\pi/3}$

Voor z heb je dus 4 oplossingen: $e^{\pm i\pi/6}$, $e^{\pm 2\pi/3}$;

in het complexe vlak ziet het er zo uit



(punten gelabeld met argument)

---

③ $f(x) = \sqrt{1+x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{4(\sqrt{1+x})^3}$

$f'''(x) \quad \dfrac{+3}{8(\sqrt{1+x})^5}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{-15}{16(\sqrt{1+x})^7}$

Derde-orde Taylorveelterm in 0:

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{8}x^3$$

Neem $x = 1$:

$$\sqrt{2} \approx T_3(1) = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{23}{16}$$

(4) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$

<u>Domein:</u> $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>Gedrag bij $x = 0$:</u>

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{y \to +\infty} (1-y) e^{-y} = 0 \quad \text{(standaardlim)}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{y \to +\infty} (1+y) e^{+y} = +\infty \quad \text{asymptoot}$$

<u>Gedrag voor $x \to \pm\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 e^{0} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 e^{0} = 1 \end{array}\right\} \text{hor. asymptoot.}$$

<u>Nulpunten:</u>

$f(x) = 0$ als $1 - \frac{1}{x} = 0$ dus $\underline{x = 1}$; $e^{-1/x} \neq 0$ voor alle x

<u>Afgeleide:</u>

$$f'(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x}$$

$= 0$ als $x = \frac{1}{2}$; hier $f(\frac{1}{2}) = -e^{-2}$

<u>Tweede afgeleide:</u>

$$f''(x) = -\frac{4x^2 - 5x + 1}{x^3} e^{-1/x}$$

$= 0$ als $x = \frac{1}{4}$ of $x = 1$; met $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} e^{-4}$
en $f'(\frac{1}{4}) = -32 e^{-4}$

<u>Tekenverloop:</u>

x		0		$1/4$		$1/2$		1	
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$-$			$-$		0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$			0		$1/e$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	0			$+$	0	$-$

We vinden dus <u>twee buigunten</u>

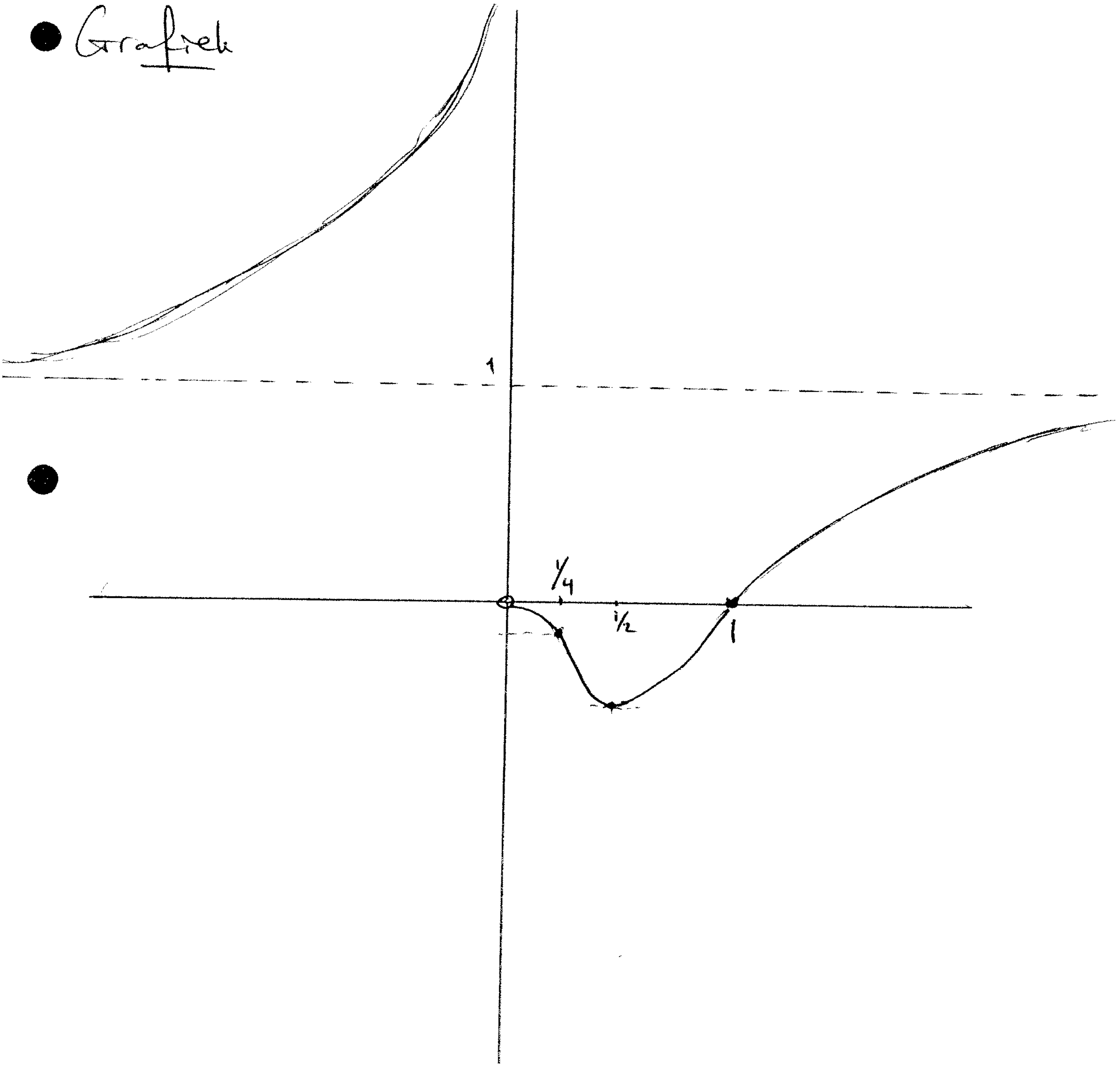
nl. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4} e^{-4}$ met raaklijn helling $-32e^{-4} < 0$

en $x = 1$, $y = 0$ met raaklijn helling $1/e > 0$

Even checken <u>hoe de grafiek</u> "naar $x=0$ gaat":

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{y \to +\infty} (2-y) y^2 e^{-y} = 0 \quad \text{(stand. lim).}$$

● <u>Grafiek</u>



(5) $$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin x + \cos x)^2 \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 + 2\sin x \cos x \, dx$$

$$= \Big[x + \sin^2 x \Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.$$

In de tweede integraal: subs $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$,
grenzen $1 \leq x \leq 12$ correspondeert met $1 \leq u \leq 2\sqrt{3}$.

$$\int_1^{12} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}} = 2 \int_1^{2\sqrt{3}} \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2} \int_1^{2\sqrt{3}} \frac{du}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \left[\arctan\left(\frac{u}{2}\right) \right]_1^{2\sqrt{3}}$$

$$= \arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \arctan\frac{1}{2}$$

---

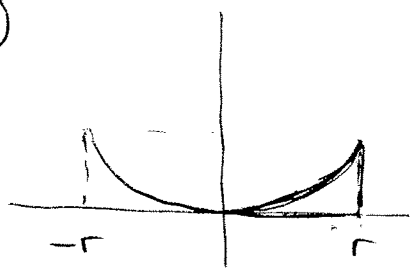
(6) $f(x)$ is gedefn. voor alle $x \leq 1$. We moeten dus 3 limieten onderzoeken.

- $$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x + \log(1-x)}{x^2} = \left[\frac{1-\infty}{1} \right] = -\infty,$$
  dus f is niet (links-) continu in $x=1$.

- $$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x + \log(1-x)}{x^2} = \left[\frac{0+0}{0} \right]$$
  l'Hopital: $$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1 + \frac{-1}{1-x}}{2x} = \left[\frac{1-1}{0} \right]$$ nogmaals:
  $$\lim_{x\downarrow 0} \frac{-(1-x)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2} \neq f(0),$$ dus niet rechtscont.

- $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ op dezelfde manier, dus ook niet links-cont in 0

7



We wentelen feitelijk het deel tussen $x=0$ en $x=r$ van de grafiek rond de y-as.

De opp is dan: $2\pi \int_0^r |x| \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

waarin $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$f'(x) = 2ax$; invullen geeft:

$$\text{Opp} = 2\pi \int_0^r x\sqrt{1+4a^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{6a^2}\left(1+4a^2x^2\right)^{3/2}\Big|_0^r$$

$$= \frac{\pi}{6a^2}\left(1+4a^2r^2\right)^{3/2} - \frac{\pi}{6a^2}$$

$$= \frac{\pi}{6a^2}\left(\left(1+4a^2r^2\right)^{3/2} - 1\right)$$

---

8 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, $x \geq 1$.

$f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

Voor $x > 1$ is $f'(x) < 0$ en dus is f (strikt) dalend;

voor $x \geq 1$ is f dalend; verder is $f(1) = 1/e < 1$

en $f(x) > 0$ (product van kwadraat en e-macht)

dus voor alle $x \geq 1$ geldt $0 < f(x) \leq \frac{1}{e} < 1$.

Wegdelen van x^2 geeft $0 < e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$

Hieruit volgt dat $0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$;

de rechter integraal is convergent (komt 1 uit),
dus (insluitstelling) is $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ convergent.
Verder is ook $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ convergent (begrensde functie op eindig interval, niet oneigenlijk!) zodat tenslotte $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ convergent is.

---

9. $m\dot{v} = mg - kv$.

a). $\dot{v}$ is versnelling; op $t=0$ is vgs. de DV:
$\dot{v} = g > 0$ en blijkbaar is snelheid en versnelling naar beneden positief.
Het voorwerp versnelt dus vanaf $t=0$, maar $\dot{v}$ wordt bij toenemende v steeds kleiner totdat $v = \frac{mg}{k}$ zou zijn; dan is $\dot{v} = 0$ en dus v constant.

b). $\dot{v} = g - \frac{k}{m}v$ scheiden:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt$$ integreren en exponeren:

$g - \frac{k}{m}v = c\,e^{-\frac{k}{m}t}$ dus $v = \frac{m}{k}\left(g - c\,e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

Randwaarde $v(0) = 0$ invullen: $c = g$

Opl: $v = \frac{kg}{m}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ (check: $t \to \infty$ dan $v \to \frac{kg}{\ldots}$