

Tentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1
Ma 2 nov 2015 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 48 punten.

1. Gegeven zijn $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, en $\mathbf{w} = -3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$. 4 pt.
Bereken $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

2. Zij $w = ze^{i\pi/4}$. Het vierkant D in het z -vlak heeft hoekpunten 0 , 1 , i , $1 + i$. 4 pt.
Bepaal het beeld van D in het w -vlak. Maak een schets van zowel D als het beeld van D .

3. Met een slinger en een klok kan men kleine variaties in de zwaartekracht meten. 4 pt.
De slingertijd T van een slinger met lengte L is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

waarin g de zwaartekrachtversnelling. Geef de procentuele verandering van g indien de slingertijd met 1% is toegenomen.

Hints: Neem aan dat L constant is en vat T op als functie van g . Differentieer en vat de afgeleide op als differentiequotient. Zoek vervolgens het verband tussen de relatieve veranderingen $\frac{\Delta T}{T}$ en $\frac{\Delta g}{g}$.

4. Onderzoek de functie $f(x) = e^{-1/x}$ en schets de grafiek. 8 pt.

5. Bereken de volgende integralen:

a. $\int \cos(3 \log x) dx$ 4 pt.

b. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ 4 pt.

6. We bekijken een inhomogene tweede-orde lineaire d.v. zonder demping

$$m\ddot{x} + kx = F \cos \omega t,$$

met begincondities $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Verder is $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

a. Laat zien dat

4 pt.

$$x = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

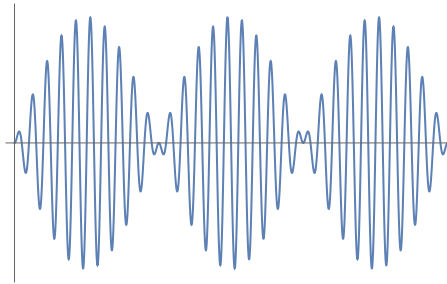
een particuliere oplossing is bij de gegeven beginwaarden.

Je mag aannemen dat deze oplossing gelijk is aan

$$x = \frac{2F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

b. Indien $\omega_0 \approx \omega$, zodat $\omega_0 - \omega$ veel kleiner is dan $\omega_0 + \omega$, kunnen zgn. “zwevingen” optreden, zie figuur. Schat met de figuur de verhouding $(\omega_0 + \omega) : (\omega_0 - \omega)$.

4 pt.



7. a. Laat zien dat $\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$ en vind hiermee een primitieve van $\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$.

4 pt.

b. Laat met een geschikte substitutie zien dat

4 pt.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{1}{u^4 + 1} du.$$

c. Toon met de vorige onderdelen aan dat

4 pt.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Indien 6a niet gelukt is: noem de primitieve van 6a $F(x)$ en geef de eigenschap(pen) die F moet hebben om 6c te laten uitkomen.