Tentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1

Ma 2 nov 2015 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks.

1. Gegeven zijn $\boldsymbol{u} = \hat{\mathbf{\imath}} - 2\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\boldsymbol{v} = 2\hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{\jmath}} - \hat{\mathbf{k}}$, en $\boldsymbol{w} = -3\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\hat{\mathbf{k}}$. 4 pt.
Bereken $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

$v \times w = 6\hat{\mathbf{\imath}} - 3\hat{\mathbf{\jmath}} + 9\hat{\mathbf{k}}$ en dus $u \cdot (v \times w) = 39$.

Andere vectornotaties bijv. met kolomvectoren zijn natuurlijk ook goed.

2. Zij $w = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Het vierkant D in het z-vlak heeft hoekpunten 0, 1, i, $1 + \mathrm{i}$. 4 pt.
Bepaal het beeld van D in het w-vlak. Maak een schets van zowel D als het beeld van D.

Als $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$ dan is $w = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z + \pi/4)}$ waaraan we aflezen dat elk punt z door vermenigvuldigen met $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ geroteerd wordt over een hoek $\frac{\pi}{4}$. Dus het vierkant D wordt geroteerd over die hoek; de zijden blijven recht en de hoekpunten komen terecht op 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$, $\sqrt{2}\mathrm{i}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})$.

Alleen de hoekpunten uitrekenen en (stilzwijgend) **aannemen** *dat de vorm van het vierkant behouden blijft is niet genoeg.Het is nodig minstens op te merken dat vermenigvuldigen met* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ *overeenstemt met rotate over* φ. *Indien geen verantwoording van de rotatie gegeven dan max 2pt.*

3. Met een slinger en een klok kan men kleine variaties in de zwaartekracht meten. De slingertijd T van een slinger met lengte L is 4 pt.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

waarin g de zwaartekrachtversnelling. Geef de procentuele verandering van g indien de slingertijd met 1% is toegenomen.
Hints: Neem aan dat L constant is en vat T op als functie van g. Differentieer en vat de afgeleide op als differentiequotiënt. Zoek vervolgens het verband tussen de relatieve veranderingen $\frac{\Delta T}{T}$ *en* $\frac{\Delta g}{g}$*.*

Differentiëren geeft $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}g} = -\pi\sqrt{\frac{L}{g^3}}$. Opgevat als differenties krijg je dan $\Delta T \approx -\pi\sqrt{\frac{L}{g^3}}\Delta g$. Delen we links door T, rechts door $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (wat hetzelfde is) dan krijgen we:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\tfrac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}.$$

Dus als $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{100}$ dan is $\frac{\Delta g}{g} \approx -\frac{2}{100}$ oftewel de relatieve verandering in g is -2%.
Gebruik van $=$ ipv $\approx$ of andersom valt in de categorie vergeeflijke kleine reken-foutjes.

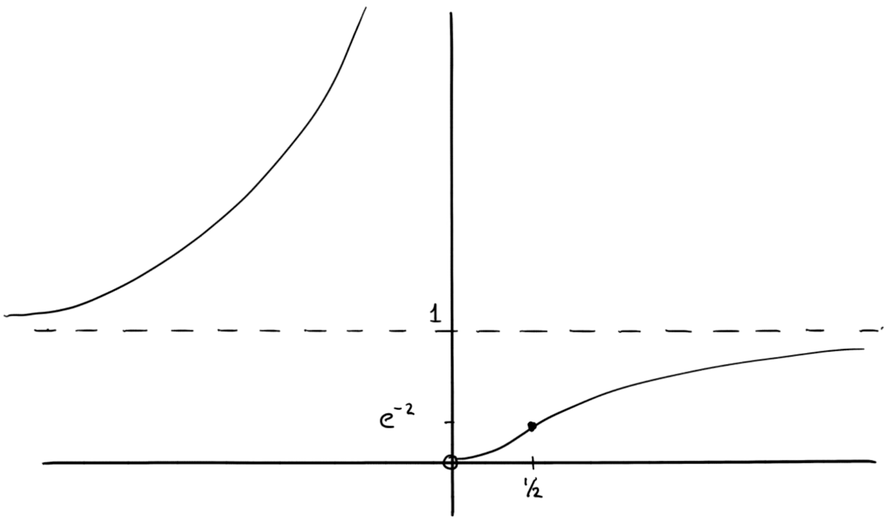
4. Onderzoek de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ en schets de grafiek. 8 pt.

- Domein: alleen $x = 0$ uitsluiten vanwege de breuk in de exponent.
- $f(x) = 0$: komt niet voor; e-macht is altijd positief.
- $\lim_{x\downarrow 0} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$ (want $-1/x \to -\infty$)
- $\lim_{x\uparrow 0} \mathrm{e}^{-1/x} = \infty$ (want $-1/x \to +\infty$)
- $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1^-$ (want $-1/x \to 0^-$)
- $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1^+$ (want $-1/x \to 0^+$)
- $f'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$
- f' is niet-nul voor alle x, wel goed gedefinieerd op D_f.

- $f'(x) > 0$ op D_f dus f is een stijgende functie.
- $f''(x) = (\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^4})\mathrm{e}^{-1/x} = \frac{1-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-1/x}$.
- $f''(x) = 0$ als $1 - 2x = 0$ dwz als $x = \frac{1}{2}$. Aangezien f'' hier van teken wisselt is er een buigpunt.
- Voor het buigpunt berekenen we nog $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}(\approx \frac{1}{30}$ en $f(\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2} \approx \frac{1}{8}$ (getalswaarde slechts als indicatie van grootte-orde; niet noodzakelijk).
- Tekenschema:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	1^+	$+$	$+\infty \lightning 0^+$	$+$	e^{-2}	$+$	1^-
$f'(x)$		$+$	$\lightning$	$+$	$\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$	

- Grafiek:



Een tekenschema hoeft niet persé, maar indien de grafiekschets niet in overeenstemming is met de verzamelde informatie terwijl een tekenschema ontbreekt, dan wel afrekenen.

5. Bereken de volgende integralen:

   a. $\int \cos(3\log x)\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Er zijn (minstens) twee wegen mogelijk.

Optie 1: eerst subs $u = \log x$, zodat $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ of equivalent $x = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u\, du$. Dan gaat de integraal over in $\int \cos(3u)\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u$. Deze kunnen we partieel integreren met $f' = \mathrm{e}^u$ en $g = \cos 3u$ (of andersom). We krijgen

$$\begin{aligned}
&\int \cos(3u)\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^u \cos(3u) + 3 \int \mathrm{e}^u \sin(3u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^u \cos(3u) + 3 \left(\mathrm{e}^u \sin(3u) - 3 \int \mathrm{e}^u \cos(3u)\,\mathrm{d}u \right) \\
&= \mathrm{e}^u \big(\cos(3u) + 3\sin(3u) \big) - 9 \int \mathrm{e}^u \cos(3u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

De laatste integrand is gelijk aan die waar we mee begonnen. Nemen we ze samen en delen we door 10 dan vinden we

$$\int \mathrm{e}^u \cos 3u \,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^u}{10}(\cos 3u + 3\sin 3u).$$

Na terugsubstitueren (en toevoegen constante) vinden we

$$\int \cos(3\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{10}\big(\cos(3\log x) + 3\sin(3\log x)\big) + c.$$

Optie 2: "Creatief nietsdoen" en partieel:

$$\begin{aligned}
\int 1 \cos(3\log x)\,\mathrm{d}x &= x\cos(3\log x) - \int x(-\tfrac{3}{x}\sin(3\log x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\cos(3\log x) + 3\int \sin(3\log x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

en evenzo:

$$\begin{aligned}
\int \sin(3\log x)\,\mathrm{d}x &= x\sin(3\log x) - \int x(\tfrac{3}{x}\cos(3\log x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\sin(3\log x) - 3\int \cos(3\log x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Noemen we nu $\mathfrak{I} = \int \cos 3\log x \,\mathrm{d}x$ dan hebben we $\mathfrak{I} = x\cos 3\log x + 3x\sin 3\log x - 9\mathfrak{I}$ oftewel $\mathfrak{I} = \frac{x}{10}(\cos 3\log x + 3\sin 3\log x) + c$.

b. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Substitueer $\sin x = u$, zodat $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$:

$$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u = \arctan(\sin x) + c.$$

6. We bekijken een inhomogene tweede-orde lineaire d.v. zonder demping

$$m\ddot{x} + kx = F\cos\omega t,$$

met begincondities $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Verder is $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

a. Laat zien dat 4 pt.

$$x = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$$

een particuliere oplossing is bij de gegeven beginwaarden.

We moeten laten zien dat x een oplossing is. Noem de voorfactor $\frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)} = \mu$, om onnodig schrijfwerk te voorkomen. Dan krijgen we, na tweemaal differentiëren:

$$\begin{aligned}
x &= \mu(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)\\
\dot{x} &= -\mu(\omega\sin\omega t - \omega_0\sin\omega_0 t)\\
\ddot{x} &= -\mu(\omega^2\cos\omega t - \omega_0^2\cos\omega_0 t)
\end{aligned}$$

We nemen de rechterkanten van de eerste vergelijking k keer, van de tweede 0 keer en de laatste m keer en tellen op, en krijgen:

$$\begin{aligned}
&(k\mu - m\mu\omega^2)\cos\omega t - (k\mu - m\mu\omega_0^2)\cos\omega_0 t\\
&= \mu\big((k - m\omega^2)\cos\omega t - (k - m\omega_0^2)\cos\omega_0 t\big).
\end{aligned}$$

De tweede term is 0 aangezien $k = m\omega_0^2$. De eerste term geeft na terugzetten van μ:

$$\frac{F(k - m\omega^2)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t = \frac{F(k - m\omega^2)}{m(k/m - \omega^2)}\cos\omega t = F\cos\omega t.$$

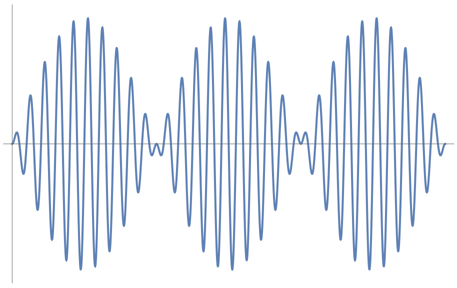
Dus x voldoet aan de inhomogene vergelijking. Bovendien, als we $t = 0$ invullen in de vergelijkingen van x resp. $\dot{x}$, vinden we de beginwaarden $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$. Dus x is de oplossing van het beginwaardeprobleem.

Indien beginwaarden vergeten: max 3pt.

Je mag aannemen dat deze oplossing gelijk is aan

$$x = \frac{2F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

b. Indien $\omega_0 \approx \omega$, zodat $\omega_0 - \omega$ veel kleiner is dan $\omega_0 + \omega$, kunnen zgn. "zwevingen" optreden, zie figuur. Schat met de figuur de verhouding $(\omega_0 + \omega) : (\omega_0 - \omega)$. 4 pt.



De korte golven hebben frequentie $\sim \omega_0 + \omega$ en de lange golven (de zwevingen) hebben frequentie $\sim \omega_0 - \omega$. Er gaan ongeveer 20 korte golven in een volledige periode van de lange golf, dus $\omega_0 + \omega : \omega_0 - \omega \approx 20 : 1$.

max 3pt indien 1:20; max 2pt indien 10:1

7. a. Laat zien dat $\dfrac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$ en vind hiermee een primitieve van $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$. 4 pt.

Eerst:

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)+(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2-2x^2} = \frac{2(x^2+1)}{x^4+1},$$

derhalve

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}. \qquad (1)$$

2pt indien tot hier toe goed.

Beide integralen rechts berekenen we als volgt. Kwadraat afsplitsen geeft $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}$ dus we gebruiken de substituties $u = x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ resp. $u = x - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, beide met $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Voor beide integralen krijgen we dan

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(\sqrt{2}u)^2+1} = \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}u.$$

Na terugsubstitueren en invullen in (1) vinden we dus

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right).$$

(Een integratieconstante is niet nodig (maar kan ook geen kwaad) want er werd gevraagd om *een* primitieve.)

b. Laat met een geschikte substitutie zien dat 4 pt.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{u^4+1}\,\mathrm{d}u.$$

Neem $u = 1/x$, met $\mathrm{d}u = -1/x^2\,\mathrm{d}x$ en de grenzen: $u \to \infty$ als $x \to 0$ en $u \to 0$ als $x \to \infty$. Dus

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_\infty^0 \frac{u^{-2}}{u^{-4}+1}(-u^{-2}\,\mathrm{d}u) =$$

$$-\int_\infty^0 \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u.$$

c. Toon met de vorige onderdelen aan dat 4 pt.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Indien 7a niet gelukt is: noem de primitieve van 7a $F(x)$ en geef de eigenschap(pen) die F moet hebben om 7c te laten uitkomen.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \\
=&2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{want integrand is even functie} \\
=&\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{wegens b} \\
=&\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{want lineair gedrag van int} \\
=&\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right)\Big|_{0}^{\infty} \quad \text{wegens a.}
\end{aligned}$$

De ondergrens geeft 0, aangezien $\arctan(-1) = -\arctan(1)$ (arctan is een oneven functie). De bovengrens geeft

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

zoals vereist.

De vereiste eigenschap van de primitieve $F(x)$ is $\lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.