Hertentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1

Do 5 jan 2017 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Gegeven zijn de vectoren $\boldsymbol{p} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ en $\boldsymbol{q} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.

   a. Bereken $\cos\alpha$ waarbij α de hoek tussen $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ is. 3 pt.

   > We gebruiken dat voor het inproduct geldt $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\alpha$, waarin $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 10$ en $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ en ook $|\boldsymbol{q}| = \sqrt{14}$ (zelfde coord in andere volgorde). Dus $\cos\alpha = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

   b. Bereken op een efficiënte manier de oppervlakte van het parallellogram dat $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ opspannen. 3 pt.

   > Gebruik eigenschap van uitproduct: de oppervlakte is gelijk aan $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|$, waarin hier $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} = -4\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}} = 4(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$, dus de oppervlakte is $4\sqrt{1+4+1} = 4\sqrt{6}$.

Als je je serieus hebt voorbereid en ook naar oude tentamens hebt gekeken dan kan ik me niet voorstellen dat je hier NIET aan uitproduct denkt, maar toch lijkt dat voor te komen.

2. In deze opgave nemen we $v = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$.

   a. Vind alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 = v$. Geef antwoord in Cartesische (rechthoeks) vorm. 4 pt.

Eerst vinden we de poolvoorstelling van v: de modulus is

$$|v| = \sqrt{(-\tfrac{3}{2})^2 + (\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{1+3} = 3$$

en het argument ϑ vinden we bijvoorbeeld met

$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{Re}(v)}{|v|} = -\frac{1}{2},$$

zodat $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$ (merk op dat v in het 2e kwadrant ligt; $\vartheta = -\frac{2}{3}\pi$ voldoet dus niet). Nu zoeken we alle oplossingen van de vergelijking $z^2 = 3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$, dit zijn $z = \sqrt{3}\mathrm{e}^{(\pi/3+k\pi)\mathrm{i}}$ met $k = 0$ of $k = 1$. In rechthoeknotatie zijn dit

$$z = \sqrt{3}(\cos\tfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{3}{2}\mathrm{i}$$

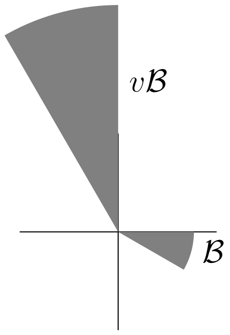
en

$$z = \sqrt{3}(\cos\tfrac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\mathrm{i}.$$

We nemen nu de verzameling $\mathcal{B}$ bestaande uit de getallen $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $0 \le |z| \le 1$ en $-\frac{\pi}{6} \le \arg z \le 0$.

   b. Bepaal het beeld van $\mathcal{B}$ onder de afbeelding (complexe functie) $z \mapsto vz$. Geef daarbij ook een duidelijke schets. 4 pt.

We hebben hierboven gevonden dat $v = 3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$. Voor elk getal $z = r\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}$ in $\mathcal{B}$ krijgen we het beeld $vz = 3r\mathrm{e}^{(2\pi/3+\varphi)\mathrm{i}}$. Met andere woorden: de hele verzameling $\mathcal{B}$ wordt geschaald met factor 3 en wordt geroteerd over hoek $\frac{2}{3}\pi$: er geldt $0 \le |vz| \le 3$ en $\frac{\pi}{2} \le \arg(vz) \le \frac{2}{3}\pi$.



3. We bekijken de functie $f(x) = x\log(1/x)$ op een zo groot mogelijk domein en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g(x) = \begin{cases} f(|x|) & \text{waar dat mogelijk is,} \\ a & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Kies $a \in \mathbb{R}$ zodanig dat g continu is op heel $\mathbb{R}$. Verklaar je antwoord. 4 pt.

De functie f is continu op het domein $x > 0$; voor $x \leq 0$ is $f(x)$ niet gedefinieerd. Dus g is goed gedefinieerd en tevens continu op heel $\mathbb{R}$ met uitzondering van 0. We moeten dus alleen maar a zo kiezen dat $\lim_{x\to 0} g(x) = a$. Welnu,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\downarrow 0} x\log\tfrac{1}{x} = \lim_{x\downarrow 0} -x\log x = 0,$$

(dit is een standaardlimiet) dus we moeten $a = 0$ kiezen.

b. Bepaal $g'(x)$ in alle punten x waar dat mogelijk is. 4 pt.

Hiervoor kunnen we het domein van g het beste in drieën verdelen: $x > 0$, $x < 0$, en $x = 0$. Ook merken we op dat $f(x) = x\log\frac{1}{x} = -x\log x$, dit vereenvoudigt het differentiëren.

- Op $x > 0$ geldt $g(x) = f(x) = -x\log x$ met afgeleide $g'(x) = -\log x - 1$, oftewel $g'(x) = -(1 + \log x)$ als $x > 0$.
- Op $x < 0$ geldt $g(x) = f(-x)$; differentiëer dit m.b.v. de kettingregel en het voorgaande: $g'(x) = -f'(-x) = 1 + \log(-x)$, oftewel $g'(x) = 1 + \log|x|$ als $x < 0$.

- Om te zien of g differentieerbaar is in $x = 0$ hebben we de limietdefinitie van afgeleide nodig:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{-h\log h - 0}{h} = \lim_{h\downarrow 0} -\log h = -\infty.$$

NB: dit is zowel de linker- als de rechterlimiet van g in 0. Omdat de limiet niet bestaat (geen reëel getal is), is g in 0 niet differentiëerbaar.

4. Evalueer de volgende integralen:

a. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2}\,\mathrm{d}x,$ 4 pt.

Substitueer $u = x^3$, zodat $\mathrm{d}u = 3x^2$, dan gaat de integraal over in $\int \frac{1}{u^2+3u+2}\,\mathrm{d}u$. De noemer kunnen we factoriseren in $(u+1)(u+2)$. Breuksplitsen ligt dus voor de hand en we zien zonder veel werk dat $\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}$. Dus:

$$\int \frac{1}{u^2+3u+2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u = \log|u+1| - \log|u+2| + c,$$

zodat na terugsubstitueren en samennemen van de logs het antwoord is:

$$\log\left|\frac{x^3+1}{x^3+2}\right| + c,$$

of als je dat eleganter vindt:

$$\log\left|1 - \frac{1}{x^3+2}\right| + c.$$

b. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\arcsin x}\,\mathrm{d}x.$ 4 pt.

Hier substitueren we eerst $\arcsin x = u$ oftewel $\sin u = x$, $\cos u\,\mathrm{d}u =$

dx, zodat we een integraal krijgen die we met 2× partieel klein krijgen:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos u \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u \\ &= \sin u \mathrm{e}^u - \int \sin u \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u \\ &= \sin u \mathrm{e}^u - (-\cos u \mathrm{e}^u + \int \cos u \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u) \\ &= (\sin u + \cos u)\mathrm{e}^u - I, \end{aligned}$$

oftewel

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{2}(\sin u + \cos u)\mathrm{e}^u + c \\ &= \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{1-x^2})\mathrm{e}^{\arcsin x} + c \text{ na terugsubstitueren.} \end{aligned}$$

5. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 6 pt.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\alpha\dot{x} + mg, \\ \dot{x}(0) &= 0, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Velen lezen de opgave niet goed en zien over het hoofd dat er helemaal geen ongedifferentiëerde x voorkomt! De opgave is dus makkelijker dan hij lijkt mits je niet in de verkeerde Pavlov-reactie schiet. Het gaat ook goed als je de standaard 2e-orde aanpak kiest met de karakteristieke vgl $m\lambda^2 + \alpha\lambda = 0$. Maar het gaat echt fout als je daar nog een term mg in stopt.

We lossen eerst het homogene probleem $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$ op voor $\dot{x}$, hetzij rechtstreeks op grond van ervaring, hetzij door scheiden. Als je kiest voor scheiden dan is het handig om $u = \dot{x}$ en $\dot{u} = \ddot{x}$ te substitueren:

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= -\alpha u, \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\tfrac{\alpha}{m} \, \mathrm{d}t, \\ \log u &= -\tfrac{\alpha}{m}t + c, \\ \dot{x} = u &= c_1 \mathrm{e}^{-\alpha t/m}. \end{aligned}$$

Als particuliere oplossing voldoet de constante functie $\dot{x}_P = \frac{mg}{\alpha}$, deze voldoet aan de gegeven inhomogene vergelijking omdat $\ddot{x}_P = 0$ en $\alpha\dot{x}_P = mg$. De algemene oplossing is de som van particuliere en homogene, dus we hebben nu

$$\dot{x} = c_1 \mathrm{e}^{-\alpha t/m} + \tfrac{mg}{\alpha}.$$

Nogmaals integreren over t geeft:

$$\begin{aligned} x &= \int c_1 \mathrm{e}^{-\alpha t/m} + \tfrac{mg}{\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{mc_1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t/m} + \tfrac{mg}{\alpha}t + c_2. \end{aligned}$$

Randwaarden invullen:

- $\dot{x}(0) = 0$ geeft $c_1 + \frac{mg}{\alpha} = 0$ oftewel $c_1 = -\frac{mg}{\alpha}$;
- $x(0) = 1$ geeft $-\frac{mc_1}{\alpha} + c_2 = 1$, of $c_2 = 1 + \frac{mc_1}{\alpha} = 1 - \frac{m^2 g}{\alpha^2}$.

Conclusie: de oplossing is

$$x = \tfrac{m^2 g}{\alpha^2}(\mathrm{e}^{-\alpha t/m} - 1) + \tfrac{mg}{\alpha}t + 1.$$

6. We definiëren een familie functies $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \text{ constante functie,} \\ u_1(x) &= 2x, \text{ en} \\ u_{n+1}(x) &= 2xu_n(x) - u_{n-1}(x) \text{ als } n \geq 1. \end{aligned}$$

a. Laat zien dat $u_2(x) = 4x^2 - 1$ en bereken zelf $u_3(x)$. 2 pt.

- Volgens de gegeven regels is
$$u_2(x) = 2xu_1(x) - u_0(x) = 2x \cdot 2x - 1 = 4x^2 - 1,$$
dat klopt.
- Op dezelfde manier is dan
$$u_3(x) = 2xu_2(x) - u_1(x) = 2x(4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 4x.$$

b. Men beweert dat voor alle n geldt: 2 pt.

$$u_n(\cos\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Laat zien dat deze bewering klopt voor $n = 0$ en $n = 1$.

- Voor $n = 0$: per definitie is $u_0(\cos\varphi) = 1$, en ook $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} = 1$, dus dat klopt mooi.
- Voor $n = 1$ hebben we per definitie $u_1(\cos\varphi) = 2\cos\varphi$ en daarnaast m.b.v. somformule

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi = u_1(\cos\varphi),$$

klopt dus ook.

c. Neem aan dat u_n en u_{n-1} de genoemde eigenschap hebben. Laat zien dat u_{n+1} hem dan ook heeft. 4 pt.
Hint: Probeer eerst op klad totdat je ziet hoe het werkt.

We moeten laten zien dat $u_{n+1}(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi}$. Eerst schrijven we m.b.v. de definitie:

$$u_{n+1}(\cos\varphi) = 2\cos\varphi\, u_n(\cos\varphi) - u_{n-1}(\cos\varphi).$$

Hierin kunnen we gebruiken dat de bewering klopt voor u_n en u_{n-1}, die kunnen we dus invullen en dan de breuken samennemen:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\cos\varphi) &= 2\cos\varphi\,\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \frac{2\cos\varphi\,\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

De teller van de laatste breuk moet dus gelijk zijn aan $\sin(n+2)\varphi$, dat is het enige dat we nog moeten laten zien. Daarvoor gebruiken we een aantal keer de somformules:

$$\begin{aligned} 2\cos\varphi\,\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi &= 2\cos\varphi(\sin\varphi\cos n\varphi + \cos\varphi\sin n\varphi) - \sin n\varphi \\ &= 2\cos\varphi\sin\varphi\cos n\varphi + (2\cos^2\varphi - 1)\sin n\varphi \\ &= \sin 2\varphi\cos n\varphi + \cos 2\varphi\sin n\varphi \\ &= \sin(n+2)\varphi, \end{aligned}$$

wat te bewijzen was.

7. Onderzoek de functie $f(x) = \log \dfrac{x}{\mathrm{e}-x}$ en schets de grafiek. 8 pt.

Om deze functie te onderzoeken is het handig om te herkennen dat $f(x) = \log \dfrac{x}{\mathrm{e}-x} = \log x - \log(\mathrm{e}-x)$, dat maakt het differentieren veel eenvoudiger en ook het domein is makkelijker te bepalen.

- Domein: om de log te kunnen nemen moet de uitdrukking $\frac{x}{\mathrm{e}-x}$ positief zijn of, wat op hetzelfde neerkomt, zowel x als $\mathrm{e}-x$ moet positief zijn (beide negatief kan onmogelijk). Dit geeft als domein dat $0 < x < \mathrm{e}$ of $x \in (0, \mathrm{e})$.

- Assen snijden: $f(x) = 0$ als $\log x = \log(\mathrm{e}-x)$ en dat is alleen als $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}$. Links hiervan is $\frac{x}{\mathrm{e}-x} < 1$ en rechts > 1, dit betekent dat $f(x) < 0$ op $(0, \frac{1}{2}\mathrm{e})$ en $f(x) > 0$ op $(\frac{1}{2}\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
  Aangezien $x = 0$ niet in het domein zit is er geen snijpunt met de y-as.

- Randen:

  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ omdat $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\mathrm{e}-x} = 0$;

  $\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = +\infty$ omdat $\lim_{x\to \mathrm{e}^-} \frac{x}{\mathrm{e}-x} = +\infty$.

- Afgeleide: $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}-x} = \frac{\mathrm{e}}{x(\mathrm{e}-x)}$. Op het hele domein van f is $x(\mathrm{e}-x) > 0$ dus f' is overal positief; f is dus stijgend en heeft geen kritieke punten.

- Tweede afgeleide: $f''(x) = -\frac{(\mathrm{e}-x)-x}{(x(\mathrm{e}-x))^2} = \frac{2x-\mathrm{e}}{(x(\mathrm{e}-x))^2}$. Er geldt dus $f''(x) = 0$ indien $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}$; we zien dat bij deze waarde van x de teller van teken wisselt terwijl de noemer altijd positief is, dus er treedt een buigpunt op bij $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}$.

- Tekenschema:

x	0		$\frac{1}{2}\mathrm{e}$		e
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Om een idee te krijgen van de helling van de grafiek in $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}$ rekenen we nog uit $f'(\frac{\mathrm{e}}{2}) = \frac{2}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{4}{\mathrm{e}} \approx 1{,}5$.

- Grafiek: