

Tentamen Wiskundige Technieken 1

Maandag 6 november 2023, 13.30 - 16.30

- Schrijf opgaven 1 en 2 samen op een apart blad, 3 en 4 samen op een apart blad, 5 en 6 samen op een apart blad en 7 en 8 op een apart blad.
- Gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan.

- (2 pt.) Gegeven zijn $\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Bereken $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
 - (2 pt.) Bepaal scalair c_1 , c_2 en c_3 zodanig dat $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = 6\hat{\mathbf{i}}$. Gebruik de methode van het *vegen*.
- (2 pt.) Bepaal alle (complexe) oplossingen van $z^4 + 1 = 0$. Schrijf ze in polaire vorm.
 - (2 pt.) Schrijf de oplossingen in de vorm $z = a + bi$ en teken ze in het complexe vlak.
- (2 pt.) Bepaal waarden van a en b zodanig dat onderstaande functie differentieerbaar is in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a \sin(x + b) & \text{als } x \leq 0 \\ 3 - x^2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

- (2 pt.) Zij $f(x) = \sin^2(x) - 1$. Bepaal het functievoorschrift en het domein van $f^{-1}(x)$.
- (3 pt.) Bepaal $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
 - (3 pt.) Bereken $\int_0^2 x^3 \ln(1+x^2) dx$.
 - (2 pt.) Bepaal het tweede orde Taylor polynoom van $f(x) = \frac{e^x}{1-x^2}$ rond $x = 0$.
 - (2 pt.) Bereken $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$, of laat zien dat de integraal niet bestaat.
 - Gegeven is de inhomogene differentiaalvergelijking $y'' + 6y' + 9y = 18 - 4e^{-x}$.
 - (2 pt.) Bepaal de algemene oplossing van de homogene vergelijking.
 - (1 pt.) Bepaal een particuliere oplossing.
 - (2 pt.) Bepaal de oplossing van de vergelijking $y'' + 6y' + 9y = 18 - 4e^{-x}$ met beginwaarden $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 - (3 pt.) Geef de oplossing van $x \frac{dy}{dx} = 1 - y^2$, met beginwaarde $y(1) = 0$.
 - (2 pt.) Bepaal $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}$.
 - (6 pt.) Onderzoek de functie $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ en schets de grafiek.

Formules

Limieten

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0$ voor $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln x = 0$ voor $a < 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-x} = 0$ voor $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^x = +\infty$ voor $a < 0$

Primitieven

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin(x/a) + C$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arccos(x/a) + C$
- $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$
- $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$

Gonio

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$