Tentamen WisTech 1 Maandag 6 nov 2023, 13:30-16:30

1| a) $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ met $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - 1\cdot -2 \\ -1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ -1\cdot -2 - 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}.$$

b) We gebruiken rijreductie als volgt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\bar{v}-\bar{w}]{2^e - 3^e} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\bar{u}+(\bar{v}-\bar{w})]{1^e + 2^e} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

dus we vinden dat $3(\bar{u}+\bar{v}-\bar{w}) = 6\hat{\imath}$. Dus $c_1 = c_2 = c_3 = 3$.

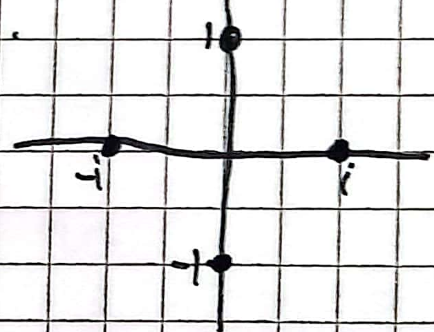
2) a) We zoeken de 4^e machtswortels van 1, deze zitten op de cirkel rondom de oorsprong met radius $|1|^{1/4} = 1$. Het argument van 1 is 0.

De wortels in polaire vorm zijn dan met argument $\frac{2\pi}{4}$ verschil ertussen

$\omega_1 = e^{i0} = 1$, $\omega_2 = e^{i\pi/2}$, $\omega_3 = e^{i\pi}$, $\omega_4 = e^{-i\pi/2}$.

b) De oplossingen in de vorm $z = a + bi$ zijn

$\omega_1 = 1$, $\omega_2 = i$, $\omega_3 = -1$, $\omega_4 = -i$.



3 a) We willen dat $a\sin(x+b) = 3-x^2$ op $x=0$, dus

$a\sin(b) = 3$.

Verder moet de afgeleide voor beide gevallen in $x=0$ gelijk zijn, dus

$a\cos(x+b) = -2x$

$a\cos(b) = 0$

dus $a=0$ of $\cos(b)=0$. Als $a=0$ dan geldt nooit dat $a\sin(b)=3$,

dus $\cos(b)=0$ en $b=\frac{1}{2}\pi$ bijvoorbeeld.

Dan $a\sin(\frac{1}{2}\pi)=3$ geeft $a=3$. Dus waarden voor

a en b zodat f differentieerbaar is in $x=0$ zijn $a=3$ en $b=\frac{1}{2}\pi$.

b) De functie f volgt

$$x \xrightarrow{\sin} \sin(x) \xrightarrow{\dots^2} \sin^2(x) \xrightarrow{-1} \sin^2(x)-1$$

dus f^{-1} wordt dan

$$\arcsin(\sqrt{y+1}) \xleftarrow{\arcsin} \sqrt{y+1} \xleftarrow{\sqrt{\dots}} y+1 \xleftarrow{+1} y$$

dus $f^{-1}(x) = \arcsin(\sqrt{x+1})$.

Voor het domein moet $-1 \leq \sqrt{x+1} \leq 1$ voor de arcsinus, dus

$x+1 \leq 1$, en voor de wortel moet $x+1 \geq 0$, dus $x \geq -1$.

Samen vinden we $x \geq -1$ en $x \leq 0$, dus het domein is $[-1, 0]$.

4 a) Substitueer $x = \sin t$, dan $dx = \cos t\, dt$ en

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\sin t + 2}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\, dt$$

Met de regel $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$ vinden we

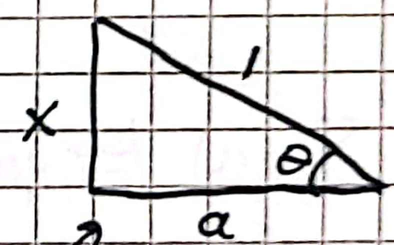
$$= \int \frac{\sin t + 2}{\cos t} \cdot \cos t\, dt = \int \sin t + 2\, dt.$$

Verder integreren geeft

$$= \int \sin t\, dt + 2 \int dt = -\cos t + 2t.$$

Met terugsubstitutie krijg je $= 2\arcsin(x) - \cos(\arcsin(x))$.

De laatste term kunnen we verder vereenvoudigen.



Zij $\arcsin\left(\frac{x}{1}\right) = \theta$, dan geldt

$\cos\theta = \frac{a}{1}$ volgens sos cas regels bij een rechthoekige driehoek.

Met pythagoras vinden we $a = \sqrt{1-x^2}$, dus in conclusie geldt

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

b) We gaan partieel integreren met

$$u = \ln(1+x^2) \quad \text{en} \quad v' = x^3$$

dus dan $u' = \dfrac{2x}{1+x^2}$ en $v = \frac{1}{4}x^4$.

Dan $\displaystyle\int_0^2 x^3 \ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(1+x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{x^4}{4}\,dx$

De laatste term werken we verder uit tot

$$\int_0^2 \frac{x^5}{2+2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^5}{1+x^2}\,dx$$

Substitueer $t = x^2$. Dan $dt = 2x\,dx$ dus $dx = \frac{1}{2x}\,dt$

en de integratie grenzen lopen van 0 tot 4 voor t.

Het resultaat is

$$\frac{1}{4}\int_0^4 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^4 t + \frac{1}{t+1} - 1\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(-t\Big|_0^4 + \frac{1}{2}t^2\Big|_0^4 + \int_0^4 \frac{1}{t+1}\,dt\right)$$

Om $\int_0^4 \frac{1}{t+1}\,dt$ op te lossen substitueren we $t+1 = y$, dus $dt = dy$

en dan $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{t+1}\,dt = \int_1^5 \frac{1}{y}\,dy = \ln(y)\Big|_1^5 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5)$.

Invullen geeft dat

$$\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{x^4}{4}\, dx = \frac{1}{4}\left(-4 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + \ln(5)\right)$$

$$= -1 + 2 + \frac{1}{4}\ln(5)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\ln(5)$$

We concluderen dan dat

$$\int_0^2 x^3 \ln(1+x^2)\, dx = \frac{1}{4}\cdot 2^4 \ln(1+2^2) - \frac{1}{4}\cdot 0^4 \cdot \ln(1+0) - \left(1 + \frac{1}{4}\ln(5)\right)$$

$$= 4\ln(5) - 1 - \frac{1}{4}\ln(5) = \frac{15}{4}\ln(5) - 1.$$

5] a) Er geldt $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$. Met de quotientregel vinden we $f'(x) = \frac{(1-x^2)e^x - e^x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$$= \frac{(1+2x-x^2)\,e^x}{1-2x^2+x^4}.$$

Dan $f'(0) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$.

Opnieuw met de quotientregel vinden we

$$f''(x) = \frac{(1+x^4-2x^2)\left((2-2x)e^x + (1+2x-x^2)e^x\right) - (1+2x-x^2)e^x(4x^3-4x)}{(1+x^4-2x^2)^2}$$

dus $f''(0) = \frac{1\cdot(2\cdot 1 + 1\cdot 1) - (1)\cdot 1 \cdot 0}{1} = 3$.

De taylor ~~reeks~~ 2e orde polynoom van $\frac{e^x}{1-x^2}$ in het steunpunt 0 wordt dan

$f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$.

b) De primitieve van $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ is $\cosh^{-1}(x)$. ~~Het~~ Het domein daarvan is het bereik van $\cosh(x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2}$. Deze functie heeft geen asymptoot naar oneindig, dus $\cosh^{-1}(x)$ voor $x \to \infty$ is niet gedefinieerd.

In conclusie, $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ convergeert niet en heeft dus geen waarde.

6) a) Stel $y = e^{ax}$ met $a \in \mathbb{R}$! Dan $y' = ae^{ax}$ en $y'' = a^2 e^{ax}$.

Om te voldoen aan de homogene vergelijking moet gelden dat

$$a^2 e^{ax} + 6ae^{ax} + 9e^{ax} = 0$$

dus $(a^2 + 6a + 9)e^{ax} = 0$

en dus $a^2 + 6a + 9 = 0$. Dit geeft $(a+3)^2 = 0$ dus $a = -3$.

Op dezelfde manier vinden we voor $y = e^{bx} \cdot x$ dat $b = -3$.

De algemene oplossing vd homogene vergelijking is dan gelijk aan

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

b) Probeer een y_p vd vorm $y_p = A + C(x)e^{-x}$. Dan:

$$y' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} \text{ en } y'' = C''(x)e^{-x} - 2C'(x)e^{-x} + C(x)e^{-x}.$$

Invullen in de inhomogene differentiaal vergelijking geeft:

$$C''(x)e^{-x} - 2C'(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} + 6C'(x)e^{-x} - 6C(x)e^{-x} + 9A + 9C(x)e^{-x} = 18 - 4e^{-x}$$

dus moet gelden $9A = 18$ dus $A = 2$.

Verder volgt dan dat

$$C''(x) - 2C'(x) + C(x) + 6C'(x) - 6C(x) + 9C(x) = -4$$

dus $C''(x) = 0$ en $C'(x) = 0$ en $C(x)$ is een constante

Een met $(1 - 6 + 9)C(x) = -4$, dus $C(x) = -1$.

De particuliere oplossing is dan $y_p = 2 - e^{-x}$.

c) De totale oplossing is $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 2 - e^{-x}$.

Dan geldt $y'(x) = -3C_1 e^{-3x} - 3C_2 e^{-3x} x + e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Uit $y(0) = 1$ volgt $C_1 \cdot 1 + 0 + 2 - 1 = 1$ dus $C_1 = 0$.

Dan $y'(0) = 0 - 3C_2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 + C_2 \cdot 1 = 0$ dus $C_2 = -1$.

De oplossing voor dit beginwaardeprobleem is dus

$$y = -xe^{-3x} + 2 - e^{-x}.$$

7) a) We schrijven $\frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{x}\,dX$. Integreren aan allebei de kanten geeft $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$.

Voor $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy$ gaan we breuksplitsen:

$$\frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A+Ay+B-By}{1-y^2} \quad \text{geeft } A-B=0 \text{ en } A+B=1.$$

Dus $A = B = \frac{1}{2}$. We krijgen:

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot -1\ln(1-y) + \frac{1}{2}\cdot \ln(1+y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)$$

Dan hebben we $\ln(1+y) - \ln(1-y) = 2\ln(x) + C_1$

Dit geeft

$$e^{\ln(1+y)-\ln(1-y)} = e^{2\ln(x)+C_1}$$

$$(1+y)/(1-y) = x^2 \cdot C_2. \quad \text{met } C_2 = e^{C_1}$$

Dan $1+y = x^2 C_2 - C_2 x^2 y$

dus $y + C_2x^2y = C_2x^2 - 1$

$$y(1+C_2x^2) = C_2x^2 - 1$$

$$y = \frac{C_2x^2-1}{1+C_2x^2}$$

De beginwaarde $y(1) = \frac{C_2-1}{1+C_2} = 0$ geeft $C_2 = 1$

dus de oplossing is $y(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

b) Sinds $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)}$ is het voldoende om $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ te berekenen.

Creatief niks doen met $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}$ geeft:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}.$$

7) a) We schrijven $\frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$. Integreren aan allebei de kanten geeft $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$.

Voor $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy$ gaan we breuksplitsen:

$$\frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A+Ay+B-By}{1-y^2}$$ geeft $A-B=0$ en $A+B=1$.

Dus $A=B=\frac{1}{2}$. We krijgen:

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot -1\ln(1-y) + \frac{1}{2}\cdot\ln(1+y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)$$

Dan hebben we $\ln(1+y) - \ln(1-y) = 2\ln(x) + C_1$.

Dit geeft

$$e^{\ln(1+y)-\ln(1-y)} = e^{2\ln(x)+C_1}$$

$$(1+y)/(1-y) = x^2 \cdot C_2. \qquad \text{met } C_2 = e^{C_1}$$

Dan $1+y = x^2 C_2 - C_2 x^2 y$

dus $y + C_2 x^2 y = C_2 x^2 - 1$

$$y(1+C_2x^2) = C_2x^2 - 1$$

$$y = \frac{C_2x^2-1}{1+C_2x^2}$$

De beginwaarde $y(1) = \frac{C_2-1}{1+C_2} = 0$ geeft $C_2 = 1$

dus de oplossing is $y(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

b) Sinds $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)}$ is het voldoende om $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ te berekenen.

Creatief niks doen met $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}$ geeft:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

7) a) We schrijven $\frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$. Integreren aan allebei de kanten geeft $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$.

Voor $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy$ gaan we breuksplitsen:

$$\frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A+Ay+B-By}{1-y^2}$$ geeft $A-B=0$ en $A+B=1$.

Dus $A=B=\frac{1}{2}$. We krijgen:

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot -\ln(1-y) + \frac{1}{2}\cdot \ln(1+y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)$$

Dan hebben we $\ln(1+y) - \ln(1-y) = 2\ln(x) + C_1$.

Dit geeft

$$e^{\ln(1+y)-\ln(1-y)} = e^{2\ln(x)+C_1}$$

$$(1+y)/(1-y) = x^2 \cdot C_2.$$ met $C_2 = e^{C_1}$

Dan $1+y = x^2 C_2 - C_2 x^2 y$

dus $y + C_2 x^2 y = C_2 x^2 - 1$

$$y(1+C_2x^2) = C_2x^2 - 1$$

$$y = \frac{C_2x^2-1}{1+C_2x^2}$$

De beginwaarde $y(1) = \frac{C_2-1}{1+C_2} = 0$ geeft $C_2 = 1$

dus de oplossing is $y(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

b) Sinds $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)}$ is het voldoende om $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ te berekenen.

Creatief iets doen met $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}$ geeft:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}.$$

Omdat $\lim_{x\to\infty} |2x| = \lim_{x\to\infty} |\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}| = \infty$ kunnen we de stelling van l'Hôpital toepassen. We hebben

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}} = \frac{2}{A} \quad \text{met } A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)$$

Schrijf $A = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{x^2+x}} + \sqrt{\frac{(2x-1)^2}{x^2-x}}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{4x^2+2x+1}{x^2+x}} + \sqrt{\frac{4x^2-2x+1}{x^2-x}}\right)$$

Creatief niks doen met $\sqrt{\frac{1/x^2}{1/x^2}}$ geeft:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4} + \sqrt{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

We vinden dat $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \frac{2}{2} = 1.$

~~8 & Op $f(\pm 1) = 0$~~

8) ik weet oprecht niet wat ze bedoelen met "onderzoek".

9) Er geldt $f(\pm 1) = 0$ en $f(0) = 1$.

Verder is $\lim_{x\to\infty} (1-x^2)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} - \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

$= 0 - 0$ volgens $\lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} = 0$ voor $a > 0$

Ook hebben we

$$\lim_{x\to-\infty} (1-x^2)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x} - x^2 e^{-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(e^{x} - x^2 e^{x}\right)$$

$\infty - \infty = -\infty$ (sneller groeiende)

dit mag echt niet