

# Tentamen Wiskundige Technieken 1

Maandag 4 november 2019 13.30 - 16.30

1. a. (2 pt.) Gegeven zijn  $\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$  en  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ . Bepaal  $\mathbf{u}_{\parallel}$  en  $\mathbf{u}_{\perp}$ . Hierbij is  $\mathbf{u}_{\parallel}$  parallel aan  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}_{\perp}$  is loodrecht op  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ .  
b. (2 pt.) Gegeven zijn twee willekeurige vectoren  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  met dezelfde lengte. Laat zien dat  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  loodrecht staat op  $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ .
2. (4 pt.) Bepaal alle oplossingen van  $z^4 = -\frac{1}{4}$  en schrijf ze in de vorm  $a + ib$ .
3. Zij  $E$  de ellips gegeven door de vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , met  $a > b > 0$ .
  - a. (1 pt.) Maak een plaatje van  $E$ .
  - b. (2 pt.) De ellips heeft twee brandpunten, met coördinaten  $(f, 0)$  en  $(-f, 0)$ . Zoals bekend is voor elk punt op de ellips de som van de afstanden van dit punt tot de brandpunten constant. Kies een speciaal punt op de ellips om te laten zien dat de constante gelijk is aan  $2a$ . Teken een plaatje.
  - c. (2 pt.) Bepaal de waarde van  $f$ , door gebruik te maken van een ander speciaal punt op de ellips. Teken een plaatje.
4. a. (3 pt.) Bepaal  $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx$ .  
b. (3 pt.) Bereken  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$ . Hint: splits onder het wortelteken een kwadraat af.
5. (4 pt.) Bepaal het tweede orde Taylor polynoom van  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  rond  $x = \pi/3$ .
6. Gegeven is de inhomogene differentiaalvergelijking  $x'' + 2x' + 5x = 3 - 5t$ .
  - a. (2 pt.) Bepaal een particuliere oplossing.
  - b. (2 pt.) Bepaal de algemene oplossing van de homogene vergelijking.
  - c. (1 pt.) Bepaal de oplossing van de vergelijking  $x'' + 2x' + 5x = 3 - 5t$  met beginwaarden  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
7. Definieer  $I(\alpha) = \int_1^{\infty} x^{-\alpha} \ln(x) dx$ .
  - a. (1 pt.) Laat zien dat  $I(1)$  divergeert.
  - b. (3 pt.) Bereken  $I(3)$ .
8. (6 pt.) Onderzoek de functie  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$  en schets de grafiek.