Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISN102 werd in 2010 gegeven door .

Wiskundige Technieke II (WISN102)
30 maart

Geef niet alleen de antwoorden, maar laat ook de afleiding van de antwoorden zien. Het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is tijdens het tentamen niet toegestaan. Een grafische rekenmachine mag wel gebruikt worden. Alle opgave tellen even zwaar

Opgave 1. Bepaal de primitieve van

a) $f(x) = 5x^2 \cos 3x$

b) $g(x) = \frac{3x}{x^2-3}$

Opgave 2. Laat F het vectorveld zijn gegeven door

$\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$ op $\mathbb{R}^3$ met weglating van (0,0,0).

a) Bereken div($\mathbf{F}$) en rot($\mathbf{F}$)

b) Zoek een functie f zodat $\mathbf{F} = \nabla(f)$. Wat is een aanwijzing dat zo een functie f bestaat?

Opgave 3. Laat $f(x,y) = \sin x - \cos y$ en $\overrightarrow{\omega} = (4{,}3)$

a) Bepaald de richtingsafgeleide (directional derivative) van de functie f in het punt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ in de richting van de vector $\overrightarrow{\omega}$.

b) In welke richting is in het punt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de richtingsafgeleide van f het grootste? En wat is de richtingsafgeleide in die richting?

c) Bepaal de richtingsafgeleide van f in de richting van de vector $\overrightarrow{\omega}$ in een algemeen punt (a,b). Wat is de maximaal haalbare richtingsafgeleide in de richting van de vector $\overrightarrow{\omega}$, en voor welke punten (a,b) wordt deze behaald?

Opgave 4. Bereken

$\int\int_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{i}) \cdot dA$, waarbij $S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4$ en $\mathbf{b}$ de naar buiten gerichte eenheidsnormaal,

a) rechtstreekse (Hint: gebruik eventueel dat $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$)

b) en met behulp van een integraalstelling.

Opgave 5. Laat F het vectorveld $\mathbf{F} = (2z, 3x, 5y)$ zijn en S het oppervlak geparameteriseerd door

$$s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4-r^2), 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi \tag{1}$$

a) Schets de doorsneden van het oppervlak S met het $(x,y)-$, (y,z) en $(x, z$-vlak. Wat is de rand ∂S van S?

b) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ direct

c) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ met behulp van de stelling van Stokes. (Hint: de naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector $\overrightarrow{n}$ bepaal je met behulp van $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$.)

Opgave 6.

a) Bepaal de waarden van alle lokale maxima en minima in $\mathbb{R}^2$ van de functie

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y \tag{2}$$

b) Bepaal met de kleinste-kwadratenmethode de rechte $y = ax + b$ die het beste past bij de (x,y)-meetpunten (0,1), (1,2) (1,3) en (2,2).

Opgave 7.

Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking.

$$x'' - x' + x = 1 + t^2 \tag{3}$$