Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISN102 werd in 2011-2012 gegeven door dr. S. ter Horst.

Wiskundige Technieken II (WISN102)
31 januari 2011

- Geef niet alleen de antwoorden, maar laat ook de afleidingen van de antwoorden zien.
- Het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is tijdens het tentamen niet toegestaan. Een grafische rekenmachine mag wel gebruikt worden.
- Alle opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

Vind de primitieven van

(a) $f(x) = \frac{3+x}{x^2-1}$.

(b) $g(x) = e^x \cos 2x$.

Opgave 2

(a) Geef alle oplossingen van de eerste orde differentiaalvergelijking

$$\dot{x} + \frac{x}{t} = \cos(t^2), \quad t > 0.$$

(b) Bepaal de unieke oplossing van de differentiaalvergelijking die ook voldoet aan

$$x(\sqrt{\pi}) = 2.$$

Opgave 3

Gegeven is het niet lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 1 + 3xy + 2x^2.$$

(a) Bereken alle evenwichtspunten van dit stelsel.

(b) Vind voor ieder evenwichtspunt de lineaire benadering rond dit punt.

(c) Bepaal voor elke evenwichtspunt of dit een stabiel of instabiel evenwichtspunt is.

Opgave 4

Laat $\mathbf{F}$ het vectorveld zijn dat wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz + e^x \cos y, \\ xz - e^x \sin y, \\ xy + z \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken div($\mathbf{F}$) en rot($\mathbf{F}$).

(b) Bepaal een functie f zo dat $\mathbf{F} = \nabla f$. Wat is een aanwijzing dat zo een f bestaat?

Z.O.Z.

Opgave 5

Maak gebruikt van de kleinste-kwadratenmethode om de rechte lijn te bepalen die het beste past bij de punten (0,1), (1,3) en (2,2).

Opgave 6

Laat $z(x,y)$ de positieve functie zijn, d.w.z. $z(x,y) \geq 0$, die gegeven wordt door de vergelijking

$$x^2 - y^2 + z^2 = 5.$$

Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$

(a) met behulp van impliciete differentiatie,

(b) door een formule voor $z(x,y)$ af te leiden en deze te differentiëren.

(c) Schets het domein in het (x,y)-vlak waarop $z(x,y)$ gedefinieerd is.

Opgave 7

Bereken

$$\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy,$$

waarbij $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq R\}$ de schijf met straal $R > 0$ is.

(a) Rechtstreeks (d.w.z. zonder gebruikt te maken van een stelling).

(b) Met behulp van een integraalstelling.

Opgave 8

Laat K de eenheidskubus zijn, $K = \{(x,y,z)\colon 0 \leq x,y,z \leq 1\}$, en $\mathbf{F}$ het vectorveld $\mathbf{F} = (x^2y, y^2z, xz^2)$. Bereken de flux $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\, dS$ van $\mathbf{F}$ door de rand ∂K van K, met behulp van de stelling van Gauss.