Wiskundige Technieken II (WISN102)

31 januari 2011

Opgave 1. Vind de primitieven van

(a) $f(x) = \frac{3+x}{x^2-1}$.

Pas eerst breuksplitsen toe: bepaal A en B zo dat

$$\frac{3+x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1},$$

d.w.z., $A + B = 1$ en $A - B = 3$. Hieraan is voldaan met $A = 2$, $B = -1$. Dus

$$\int \frac{3+x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\,dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left(\frac{(x-1)^2}{|x+1|}\right) + C.$$

(b) $g(x) = e^x \cos 2x$.

Pas twee maal partiële integratie toe:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 2x\,dx &= e^x \cos 2x - \int e^x(-2\sin 2x)\,dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\,dx \\ &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x\,dx.\end{aligned}$$

Dus $5\int e^x \cos 2x\,dx = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$ en

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C.$$

Opgave 2.

(a) Geef alle oplossingen van de eerste orde differentiaalvergelijking

$$\dot{x} + \frac{x}{t} = \cos(t^2), \quad t > 0.$$

Via de standard formule hebben we

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\int 1/t\,dt} \int e^{\int 1/t\,dt} \cos(t^2)\,dt + Ce^{-\int 1/t\,dt} \\ &= \frac{1}{t}\int t\cos(t^2)\,dt + \frac{C}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\sin(t^2)\right) + \frac{C}{t} = \frac{1}{2t}\sin(t^2) + \frac{C}{t}.\end{aligned}$$

In de tweede identiteit werd de substitutie $u = t^2$ (met $du = 2t\,dt$) gebruikt.

(b) Bepaal de unieke oplossing van de differentiaalvergelijking die ook voldoet aan

$$x(\sqrt{\pi}) = 2.$$

Met $t = \sqrt{\pi}$ krijgen we $x(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sin(\pi) + \frac{C}{\sqrt{\pi}} = \frac{C}{\sqrt{\pi}} = 2$. Dus $C = 2\sqrt{\pi}$ en de unieke oplossing wordt gegeven door $x(t) = \frac{1}{2t}\sin(t^2) + \frac{2\sqrt{\pi}}{t}$.

Opgave 3. Gegeven is het niet lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 1 + 3xy + 2x^2.$$

(a) Bereken alle evenwichtspunten van dit stelsel.

De evenwichtspunten voldoen aan $\dot{x} = x+y = 0$ en $\dot{y} = 1+3xy+2x^2 = 0$. Dus $x = -y$ en $0 = 1 + 3xy + 2x^2 = 1 - x^2$. De evenwichtspunten zijn dus $(x_1, y_1) = (1, -1)$ en $(x_2, y_2) = (-1, 1)$.

(b) Vind voor ieder evenwichtspunt de lineaire benadering rond dit punt.

Neem $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = 1 + 3xy + 2x^2$ en

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3y + 4x & 3x \end{pmatrix}.$$

Dan worden de matrices A_1 en A_2 voor de linearisaties om de evenwichtspunten $(1, -1)$, resp. $(-1, 1)$, gegeven door

$$A_1 = K(x_1, y_1) = K(1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$$

resp.

$$A_2 = K(x_2, y_2) = K(-1, 1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{smallmatrix}\right).$$

(c) Bepaal voor elke evenwichtspunt of dit een stabiel of instabiel evenwichtspunt is.

Stabiliteit van de evewichtspunten wordt bepaald door de eigenwaarden van de matrices A_1 en A_2 bij de linearisaties. Er geldt

$$\det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \quad \text{voor} \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Beide zijn positief, dus $(1, -1)$ is een instabiel evenwichtspunt. Voor A_2 geldt

$$\det(A_2 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \quad \text{voor} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

In dit geval is één van de eigenwaarden positief en één negatief. Dan is het evenwichtspunt wederom instabiel.

Opgave 4. Laat $\mathbf{F}$ het vectorveld zijn dat wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz + e^x \cos y, \\ xz - e^x \sin y, \\ xy + z \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken div(**F**) en rot(**F**).

De divergentie:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} = e^x \cos y - e^x \cos y + 1 = 1$$

De rotatie van **F** moet wel 0 zijn vanwege het antwoord bij onderdeel (b).

(b) Bepaal een functie $f(x, y, z)$ zo dat $\mathbf{F} = \nabla f$. Wat is een aanwijzing dat zo een functie f bestaat?

Neem bijvoorbeeld $f(x, y, z) = xyz + \frac{z^2}{2} + e^x \cos y$. Zo'n functie f bestaat omdat $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$.

Opgave 5. Maak gebruikt van de kleinste-kwadratenmethode om de rechte lijn te bepalen die het beste past bij de punten (0,1), (1,3) en (2,2).

We zoeken hierbij het minimum van de functie $g(a, b) = \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2$, waarbij (x_i, y_i) de gegeven punten zijn. Om de stationaire punten te bepalen berekenen we dat

$$g_a(a, b) = \sum_{i=1}^{3} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{3} x_i - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right)$$

en

$$g_b(a, b) = \sum_{i=1}^{3} 2(ax_i + b - y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{3} x_i + 3b - \sum_{i=1}^{3} y_i\right)$$

Hierbij

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 3, \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 3, \quad \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = 7, \quad \sum_{i=1}^{3} y_i = 6.$$

De stationaire punten (a,b) voldoen dus aan $g_a(a, b) = g_b(a, b) = 0$, d.w.z., aan

$$5a + 3b = 7, \quad 3a + 3b = 6.$$

De oplossing van dit lineaire stelsel vergelijkingen is $(a, b) = \frac{1}{2}(1, 3)$. De kleinste kwadraten methode geeft dus $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ als lijn die het best bij de gegeven punten past.

Opgave 6. Laat $z(x, y)$ de positieve functie zijn, d.w.z. $z(x, y) \geq 0$, die gegeven wordt door de vergelijking

$$x^2 - y^2 + z^2 = 5, \quad .$$

Bepaal formules voor $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$

(a) met behulp van impliciete differentiatie,

Neem $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$. Volgens de impliciete differentiatie formules geldt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-f_x}{f_z} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_y}{f_z} = \frac{2y}{2z} = \frac{y}{z}.$$

(b) door een formule voor $z(x, y)$ af te leiden en deze te differentiëren.

Er geldt $z(x, y) = \pm\sqrt{5 - x^2 + y^2}$, en dus $z(x, y) = \sqrt{5 - x^2 + y^2}$ omdat $z(x, y) \geq 0$. Dan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{5 - x^2 + y^2}}.$$

In het bijzonder volgt uit deze expliciete formules meteen de impliciete formules gevonden bij onderdeel (a).

(c) Schets het domein in het (x, y)-vlak waarop $z(x, y)$ gedefinieerd is.

Het gaat hier om de punten (x, y) waarvoor $5 - x^2 + y^2 \geq 0$. Op de rand van dit domein geldt $5 - x^2 + y^2 = 0$ en dus $y = \pm\sqrt{5 + x^2}$. Verder is $(0, 0)$ een element van het domein.

Opgave 7. Bereken

$$\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy,$$

waarbij $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq R\}$ de schijf met straal $R > 0$ is.

(a) Rechtstreeks (d.w.z. zonder gebruikt te maken van een stelling).

Neem als parametrisatie van ∂D de functie $r(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. We krijgen dan

$$\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} -y\frac{dx}{d\theta} + x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} R^2\,d\theta = 2\pi R^2.$$

(b) Met behulp van een integraalstelling.

Pas de stelling van Green toe:

$$\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\,dA = \iint_D 2\,dA = 2\,\mathrm{opp}(D) = 2\pi R^2.$$

Opgave 8. Laat K de eenheidskubus zijn, $K = \{(x, y, z) \colon 0 \leq x, y, z \leq 1\}$, en $\mathbf{F}$ het vectorveld $\mathbf{F} = (x^2y, y^2z, xz^2)$. Bereken de flux $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\,dS$ van $\mathbf{F}$ door de rand ∂K van K, met behulp van de stelling van Gauss.

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\,dS &= \iiint_K \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV = \iiint_K 2xy + 2yz + 2xz\,dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2xy + 2yz + 2xz\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$