

Herkansing Wiskundige Technieken II (WISN102) 13 maart 2011

- Geef niet alleen de antwoorden, maar laat ook de afleidingen van de antwoorden zien.
- Het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is tijdens het tentamen niet toegestaan. Een grafische rekenmachine mag wel gebruikt worden.
- Alle opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

Vind de primitieven van

(a) $f(x) = 5x^2 \cos(3x)$.

(b) $g(x) = \frac{3x}{x^2+3}$.

Opgave 2

Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x'' - 2x' + 2x = \cos t$$

Opgave 3

Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$x' = y, \quad y' = -4y - \sin x. \quad (1)$$

- Herschrijf dit stelsel differentiaalvergelijkingen tot één tweede order differentiaalvergelijking.
- Ga na dat het punt $(\pi, 0)$ een evenwichtspunt is en bepaal alle overige evenwichtspunten.
- Bepaal de linearisatie van (1) rond het punt $(\pi, 0)$.
- Bepaal of het evenwichtspunt $(\pi, 0)$ stabiel of instabiel is, mits dit uit de linearisatie af te leiden is.
- Geef een schets van de oplossingen van het bij (c) bepaalde lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen in het (x, y) -vlak. Geef ook de asymptoten van de oplossingen aan.

Opgave 4

- (a) Bepaal alle lokale maxima en minima in \mathbb{R}^2 van de functie

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y.$$

(En dus ook of het om een lokaal maximum of lokaal minimum gaat.)

- (b) Zijn de bij (a) bepaalde lokale maxima en minima ook globale maxima en minima?

Z.O.Z.

Opgave 5

Laat \mathbf{F} het vectorveld zijn dat wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2z^3 + 2x \cos y \\ 3 + 2ye^z - x^2 \sin y \\ y^2 e^z - 6xz^2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bereken $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ en $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$.
- (b) Bepaal een functie f zo dat $\mathbf{F} = \nabla f$.

Opgave 6

Bekijk de integraal

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x}{2-x^4} dx dy.$$

- (a) Teken het domein waarover wordt geïntegreerd.
- (b) Bereken de integraal door eerst de volgorde van integratie om te draaien (d.w.z. naar een integraal met $dy dx$).

Opgave 7

Bereken

$$\int_{\partial D} -y dx + x dy,$$

waarbij $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ de schijf met straal $R > 0$ is.

- (a) Rechtstreeks (d.w.z. zonder gebruikt te maken van een stelling).
- (b) Met behulp van een integraalstelling.

Opgave 8

Laat \mathbf{F} het vectorveld $\mathbf{F} = (-2y, 3z, 3x)$ zijn en S het oppervlak geparаметeriseerd door

$$\mathbf{s}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2 - r), \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

- (a) Schets de doorsneden van het oppervlak S met het (x, y) - (y, z) - en (x, z) -vlak. Wat is de rand ∂S van S ?
- (b) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ direct.
- (c) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ met behulp van de stelling van Stokes.