WISKUNDIGE TECHNIEKEN 2 (WISN102), 30 JANUARI 2012, 15.00-18.00

Vergeet niet je naam en collegekaartnummer op je werk te schrijven. Geef aan hoe je aan je antwoord komt (zoals bij de inleveropgaven). Alle opgaven tellen even zwaar.

LEVER IEDERE OPGAVE IN OP EEN APART BLAD.

OPGAVE 1

Vind de primitieven van

a.) $f(x) = 6x^2 \sin(2x)$

b.) $g(x) = \frac{3x^6}{x^7+1}$

OPGAVE 2

Deze opgave wordt vergeleken met het resultaat van de werkcollegequiz. Het beste van de twee resultaten telt.

Bepaal alle reele oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$2x'' + x' - x = 3t + 7e^{-2t}.$$

OPGAVE 3

Gegeven is de tweede orde lineaire differentiaal vergelijking

$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$

a.) Schrijf deze vergelijking als een stelsel lineaire eerste orde vergelijkingen.

b.) Laat zien dat $(0,0)$ het enige evenwichtspunt van het stelsel a.) is.

c.) Bepaal de aard van het stationaire punt $(0,0)$ en schets het faseportret.

OPGAVE 4

a.) Bepaal de coordinaten van de stationaire punten van de functie

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^2 - 2xy + 2x + y,$$

en bepaal hun aard (minimum, maximum, zadelpunt).

b.) Bepaal met de kleinste kwadraten methode de rechte lijn die het best past bij de punten $(1,1)$, $(3,2)$ en $(0,4)$.

Opgave 5

Zij F het vectorveld gegeven door

$$F(x,y,z) = (y\sin z, x\sin z - e^{z^2-y}, -xy\cos z + 2ze^{z^2-y}).$$

a.) Bepaal div$F$.

b.) Bepaal curl$F$.

c.) Vind een functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met $F = \nabla f$.

Opgave 6

Beschouw de ellips

$$E = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\},$$

in $\mathbb{R}^2$.

a.) Stel $D = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t < 2\pi\}$, en laat zien dat $g : D \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$g(r,t) = (2r\cos t, r\sin t),$$

een parametrisatie is van deze ellips.

b.) Bereken de oppervlakte van E door middel van het uitrekenen van een dubbelintegraal.

Opgave 7

Gegeven is het vectorveld $v(x,y,z) = (e^{2z} + y^2, y, \cos x \sin y)$. Verder is S de rand van het gebied

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 3\},$$

en S is georienteerd met naar buiten gericht eenheidsnormaalvectorveld n. Bepaal $\int\int_S \langle v, n\rangle dA$ met behulp van een integraalstelling.

Opgave 8

Bereken met de stelling van Green

$$\int_C y^2 dx + x dy,$$

waarbij C de rand is van het gebied $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. De orientatie C is de gebruikelijke (tegenwijzerrichting).