Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 28 jan 2013 15:00 – 18:00

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk. Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 46 punten.

1. (4pt) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + p\mathbf{k}$.
Voor welke p liggen de vectoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ in één vlak?

2. (4pt) Leid af dat voor een vectorveld $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ geldt

$$\partial_1 |\mathbf{F}| = \frac{\mathbf{F} \bullet \partial_1 \mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}.$$

3. (4pt, 4pt) ***Stelling:*** *Als $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie is op een gesloten en begrensd gebied V in $\mathbb{R}^n$, dan heeft f op V een maximum en een minimum.*

Neem $f(x, y) = \log(1 + xy)$ en twee gebieden in $\mathbb{R}^2$: A met $x^2 + y^2 = 2$, en B met $x^2 + y^2 \leq 1$.

a. Is de stelling toepasbaar op f en A? Zo nee: verklaar waarom niet, zo ja: vind de extremen.

b. Is de stelling toepasbaar op f en B? Zo nee: verklaar waarom niet, zo ja: vind de extremen.

4. (4pt, 4pt) De (gladde) scalaire functie $z = z(x, y)$ is impliciet gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$.

a. Leid af dat $\partial_1 z = -\dfrac{\partial_1 f}{\partial_3 f}$ en $\partial_2 z = -\dfrac{\partial_2 f}{\partial_3 f}$.

b. Vind soortgelijke uitdrukkingen voor $\partial_{11} z$ en $\partial_{12} z$.

5. (6pt) Het lichaam V is beschreven door

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$$

met $a > 0$. Bereken

$$\iiint_V \rho^2 \, \mathrm{d}V,$$

waarin ρ de horizontale afstand van volume-elementen tot de z-as is (terzijde: dit is het traagheidsmoment van V om de z-as).

6. (4pt, 4pt) Stel ϕ en ψ zijn scalarvelden en $\mathbf{F}$ vectorveld, alle op $\mathbb{R}^3$.

a. Bewijs: $\nabla \bullet (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \bullet \mathbf{F} + \phi(\nabla \bullet \mathbf{F})$.

b. Veronderstel dat ψ harmonisch is, d.w.z. ψ voldoet aan de Laplacevergelijking. Laat zien dat $\operatorname{div}(\phi \operatorname{grad}(\psi)) = \operatorname{grad}(\phi) \bullet \operatorname{grad}(\psi)$.

7. (4pt, 4pt) Zij R een (regulier, begrensd) gebied in het xy-vlak en zij $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ een vlak vectorveld.

a. Bereken $\nabla \times \mathbf{F}$ en schrijf het oppervlak van R als een kringintegraal over de rand ∂R.

b. Vind het oppervlak omsloten door de kromme $\mathbf{r}(t) = (\cos 3t, \sin 2t)$, met $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   Hint: prostaphaeresis, d.w.z.:
   $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$
   $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$