Uitwerking Tentamen WisTech 2 28/1/2013

Normering: zie WisTech 1 en/of laatste pag alhier.

(1) a, b, c in 1 vlak als $a \times b \perp c$ dwz $(a \times b) \cdot c = 0$ of willekeurig welke volgorde vd vectoren; oftwel $\det(a, b, c) = 0$.

Coörd. invullen: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & p \end{vmatrix} = 0$ dus:

$1(p+1) + 1(-2p-3) - (2-3) = 0$ dus $-1-p=0$, $\underline{p=-1}$ zie NOOT p. 5

(2) $|F| = \sqrt{F \cdot F}$ diff: $\frac{\partial}{\partial t}|F| = \frac{(F \cdot F)'}{2\sqrt{F \cdot F}} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}F \cdot F + F \cdot \frac{\partial}{\partial t}F}{2\sqrt{F \cdot F}}$

$= \frac{F \cdot \frac{\partial}{\partial t}F}{|F|}$ (staat ook ergens als voorbeeld in boek)

(3) a) Punten $(-1,1)$ en $(1,-1)$ liggen op A en daar is f niet gedefinieerd, laat staan continu. Dus niet toepasbaar. (A is wel gesloten en begrensd)

b). Wel toepasbaar (toelichting niet gevraagd)

Extremen liggen (i) in kritiek punt (ii) op rand of (iii) in singulier punt.

(i) Krit pt: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy}\right) = (0,0)$ alleen als $x=0$ en $y=0$; $f(0,0) = \log 1 = 0$.

(ii) Rand: parametriseer met $x = \cos t$, $y = \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$

Invullen en diff geeft $\frac{d}{dt} f(x,y) = \frac{\cos 2t}{1 + \frac{1}{2}\sin 2t} = 0$ als $t = \pm\frac{\pi}{4}$ of $t = \pm\frac{3\pi}{4}$

met extremen $\log(1+\frac{1}{2}) = \log(\frac{3}{2}) = \log 3 - \log 2$ $\underline{\max}$

en $\log(1-\frac{1}{2}) = \log(\frac{1}{2}) = -\log 2$ $\underline{\min}$

(iii) Aan ∇f in (1) zie je dat er geen singuliere punten zijn op B.

We vinden dus een <u>max</u> $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ in punten

$$(x,y) = \pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

en een <u>min</u> $\log\frac{1}{2} = -\log 2$ in $(x,y) = \pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

4a) $f(x,y,z)=0$ impliciet diff naar x:

- (*) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, geeft $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}$

Idem naar y geeft:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{of} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

b). De uitdrukking (*) diff naar x resp y:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

Subs $\frac{\partial z}{\partial x}$ uit (a); en herschrijf

- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{\partial f/\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\left[\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left[-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\right]^2\right)$$

$$= \frac{-1}{(\partial f/\partial z)^2}\left(+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Dus

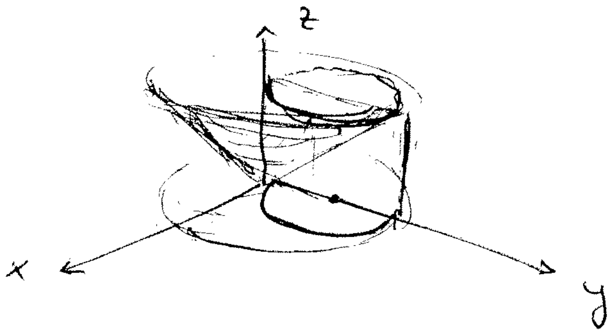
$$\partial_{11} z = \frac{-1}{(\partial_3 f)^3}\left(\partial_{11} f(\partial_3 f)^2 - \partial_{31} f\,\partial_1 f\,\partial_3 f + \partial_{33} f(\partial_1 f)^2\right)$$

- Analoog:

$$\partial_{12} z = \frac{-1}{(\partial_3 f)^3}\left(\partial_{12} f(\partial_3 f)^2 - \partial_{32} f\,\partial_2 f\,\partial_3 f + \partial_{33} f(\partial_2 f)^2\right)$$

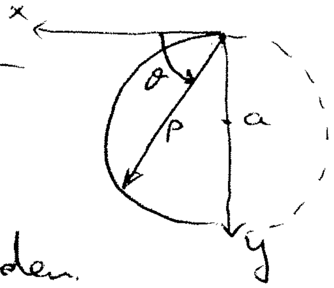
(5) $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+(y-a)^2 \le a^2$



In cylindercoordinaten:

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta$$



met $0 \le \vartheta \le \pi$

en de vgl. die V beschrijven luiden:

$$\begin{cases} 0 \le z \le \rho \\ \rho^2 \le 2a\rho\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 0 \le z \le \rho \\ 0 \le \rho \le 2a\sin\vartheta \end{cases}$$

De Jacobiaan van cyl. coord is ook ρ. Invullen:

$$\iiint_V \rho^2 dV = \cancel{\int\int\int_0^{2a\sin\vartheta} \rho^3 d\rho} = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\vartheta}\int_0^{\rho} \rho^3 \, dz \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\vartheta} \rho^4 \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^{\pi} \frac{1}{5}(2a\sin\vartheta)^5 d\vartheta$$

$$= \frac{32a^5}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)^2 \sin\vartheta \, d\vartheta = \qquad \begin{array}{c} u = \cos\vartheta \\ -du = \sin\vartheta \, d\vartheta \end{array}$$

$$-1 \le u \le +1$$

$$= +\frac{32a^5}{5}\int_{-1}^{1} 1 - 2u^2 + u^4 \, du =$$

$$= \frac{32a^5}{5}\left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^{1} = 2\,\frac{32a^5}{5}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2\cdot 8\cdot 32a^5}{15\cdot 5} = \frac{512a^5}{75}$$

(6a) Schrijf in coordinaten $F = (F_1, F_2, F_3)$

Merk op $\varphi F = (\varphi F_1, \varphi F_2, \varphi F_3)$ en

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi F_1) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right) F_1 + \varphi \frac{\partial}{\partial x} F_1 = (\partial_1 \varphi) F_1 + \varphi \partial_1 F_1$$

Dus
$$\nabla \cdot (\varphi F) = (\partial_1 \varphi) F_1 + (\partial_2 \varphi) F_2 + (\partial_3 \varphi) F_3$$
$$+ \varphi (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3)$$
$$= (\nabla \varphi) \cdot F + \varphi (\nabla \cdot F)$$

b) ψ harmonisch dus $\nabla \cdot (\nabla \psi) = 0$

Neem in (a) $F = \nabla \psi$ en merk op dat de laatste term verdwijnt

---

(7a) F opvatten als $F(x,y,z) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, 0)$ in $\mathbb{R}^3$,

dan is $\nabla \times F = (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\bar{k} = (0, 0, 1)$

Stelling v Green toepassen:

$$\text{Opp} = \iint_R dS = \iint_R (\nabla \times F) \cdot d\bar{S} = \int_{\partial R} F \cdot d\bar{r}$$

b) Pas (a) toe met $\bar{r}(t)$ als parametrisering van de rand ∂R. We hebben $\frac{d\bar{r}}{dt} = (-3\sin 3t, 2\cos 2t)$ en

dus $F \cdot d\bar{r} = (-\frac{1}{2}\sin 2t, \frac{1}{2}\cos 3t) \cdot (-3\sin 3t, 2\cos 2t)$

$= \frac{3}{2}\sin 2t \sin 3t + \cos 3t \cos 2t$

$\cancel{= \frac{3}{4}(\sin t + \sin 5t) + \frac{1}{2}(\cos t + \cos 5t)}$

$= \frac{3}{4}(\cos(-t) + \cos 5t) + \frac{1}{2}(\cos t + \cos 5t)$

$= \frac{5}{4}(\cos t + \cos 5t)$

(5

Dus de opp is $\int_{\partial R} F \cdot dr = \frac{5}{4}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos t + \cos 5t \, dt =$

$= \frac{5}{4}\left[\sin t + \frac{1}{5}\sin 5t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2 = 3$

- **Normering** van 4punts vragen

4pt = goed uitgewerkt, evt een onbelangrijk rekenfoutje

~~4pt = basis wel begrepen, struikelt evt details~~

3pt = wel begrepen maar slordig uitgevoerd, details niet in de vingers, slechte notaties

- 2 pt = grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking, onvoldoende controle/zelfreflexie

1pt = aardig beginnetje maar komt niet verder

0pt = geen idee wat te doen

Noot bij opg 1: Achteraf een hele domme opgave! Je ziet nl. als je goed naar de gegevens kijkt dat $\vec{b} = \vec{c}$ als je $p = -1$ kiest. Aangezien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ sowieso in 1 vlak liggen ben je dan eigenlijk al klaar...