Wiskundige Technieken 2
Uitwerkingen Hertentamen 9 maart 2015

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort; signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken; maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid); gebruikt verwerpelijke notaties
2pt	weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht; mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.; herkent evident foute tussenresultaten niet; toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. We lossen het stelsel op door het eerst is matix-vectorvorm te zetten en vervolgens te vegen. Het veegwerk kan gelukkig in al twee stappen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3^*=R_1-R_3]{R_2^*=2R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3^{**}=R_3^*-R_2^*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen die we gaan parametriseren. We kiezen als parameter $x_3 = t$, zodat we later niet hoeven te delen door 2. Uit de tweede vergelijking volgt dan dat $x_2 = -2x_3 = -2t$ en uit de eerste vergelijking

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_3 \\ &= -(-2t) - t \;=\; t. \end{aligned}$$

De oplossingen van dit stelsel zijn dus $(x_1, x_2, x_3) = (t, -2t, t)$ met $t \in \mathbb{R}$.

2. De kromme $\mathcal{C}$ staat overal loodrecht op de niveaukrommen van $f(x, y)$. Omdat de gradiënt van een gladde functie altijd loodrecht op zijn niveaukrommen staat, weten we dat $\nabla f(x, y) = \big(4x^3, 2y\big)$ loodrecht staat op de niveaukrommen van $f(x, y)$. Dit betekent dat in elk punt (x, y) in $\mathcal{C}$ de vector $\big(4x^3, 2y\big)$ een raakvector van $\mathcal{C}$ in (x, y) is. De helling van $\mathcal{C}$ in (x, y) kunnen we berekenen met behulp van deze vector:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{4x^3}.$$

Deze differentiaalvergelijking lossen we op voor y met scheiding van variabelen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2y}{4x^3} \\ 2\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \\ 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \\ 2\log y &= \frac{-1}{2x^2} + C_1 \\ \log y &= \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{4x^2} \\ y &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4x^2}}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = \mathrm{e}^{\frac{C_1}{2}}$ kiezen. De constante C kunnen we bepalen omdat we weten dat de kromme $\mathcal{C}$ door het punt $(1, 1)$ gaat. Vullen we dit in in de gevonden oplossing, dan vinden we:

$$\begin{aligned} y &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4x^2}} \\ 1 &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \\ C &= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

en dus is een vergelijking voor de kromme $\mathcal{C}$:

$$y \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4x^2}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^2}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{4x^2}}.$$

3. a. Parametriseer de kromme als $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$ met $0 \leq t \leq 3$, dan is de lengte gelijk aan:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s &= \int_0^3 \sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (2t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^3 \sqrt{(2t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 2t^2 + 1\,\mathrm{d}t \;=\; 18 + 3 \;=\; 21.\end{aligned}$$

b. We parametriseren de beweging van het deeltje als $\mathbf{r}(t) = \left(x(t), x(t)^2, \frac{2}{3}x(t)^3\right)$. De snelheidsvector berekenen we met behulp van de kettingregel. Deze is gelijk aan

$$\mathbf{v}(t) \;=\; \left(x'(t), 2x(t)x'(t), 2x(t)^2x'(t)\right)$$

en deze heeft grootte:

$$\begin{aligned}v(t) &= \sqrt{(x'(t))^2 + \left(2x(t)x'(t)\right)^2 + \left(2x(t)^2x'(t)\right)^2} \\ &= \sqrt{x'(t)^2\left(1 + 4x(t)^2 + 4x(t)^4\right)} \\ &= |x'(t)|\left(2x(t)^2+1\right) \;=\; x'(t)\left(2x(t)^2+1\right),\end{aligned}$$

waarbij we de absoluutstrepen om $x'(t)$ kunnen weglaten omdat het deeltje in richting van toenemende x loopt. Omdat we geïnteresseerd zijn in het moment waarop $x(t) = 1$ en omdat bovendien gegeven is dat $v(t) = 1$ voor alle t, volgt nu dat:

$$\begin{aligned}v(t) &= x'(t)\left(2x(t)^2+1\right) \\ 1 &= 3x'(t),\end{aligned}$$

ofwel $x'(t) = \frac{1}{3}$ op het moment dat het deeltje het punt $\left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$ passeert. Nu substitueren we dit samen met $x(t) = 1$ in de uitdrukking voor $\mathbf{v}(t)$ en vinden we de gevraagde snelheidsvector $\mathbf{v}(t) = \left(x'(t), 2x(t)x'(t), 2x(t)^2x'(t)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. a. We berekenen de twee afgeleiden. Het linkerlid is:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \;=\; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}.$$

Het rechterlid is:

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}.$$

We moeten nu nog alleen nagaan dat

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \;=\; \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x},$$

maar dat volgt uit het gegeven dat u een gladde functie is en dus dat de gemengde partiële afgeleiden van dezelfde orde van u gelijk zijn.

b. We gaan na of $xu(x,y)$ biharmonisch is. Als dat het geval is, dan is $yu(x,y)$ ook biharmonisch (en als $x(u,y)$ niet biharmonisch is, dan is $yu(x,y)$ dat ook niet; zie ook de opmerking verderop). We berekenen de partiële afgeleiden van $xu(x,y)$ naar x met de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(xu) &= u + x\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u + x\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 2\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

De partiële afgeleiden van $xu(x,y)$ naar y zijn een stuk makkelijker:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(xu) &= x\frac{\partial u}{\partial y},\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xu) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

De Laplaciaan van $xu(x,y)$ is dus:

$$\begin{aligned}\Delta(xu) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xu)\\ &= 2\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &= 2\frac{\partial u}{\partial x} + x\Delta u = 2\frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}$$

waarbij we gebruiken dat u harmonisch is. Om na te gaan of $xu(x,y)$ biharmonisch is, moeten we de Laplaciaan van $\Delta(xu(x,y))$ berekenen. Hiervoor gebruiken we de gelijkheid van onderdeel (a):

$$\Delta(\Delta(xu)) = \Delta\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) = 0,$$

waar de laatste gelijkheid geldt omdat $u(x,y)$ harmonisch is. We zien dat $\Delta(xu(x,y))$ harmonisch is, dus is $xu(x,y)$ biharmonisch. De uitspraak is dus waar.

Opmerking:
Uit het feit dat $xu(x,y)$ biharmonisch is kunnen we direct afleiden dat ook $yu(x,y)$ biharmonisch is. Dat doen we door in de uitwerking voor $xu(x,y)$ steeds overal x door y te vervangen (en andersom); de uitwerking die zo ontstaat is nog steeds wiskundig correct en toont nu aan dat $yu(x,y)$ biharmonisch is. Wie daar niet direct van overtuigd is kan natuurlijk ook dezelfde stappen uitvoeren die we voor $xu(x,y)$ hebben gedaan. Zo zijn de partiële afgeleiden van $yu(x,y)$ naar x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(yu) &= y\frac{\partial u}{\partial x},\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(yu) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\end{aligned}$$

en als we nu steeds x door y vervangen (en andersom), dan vinden we de partiële afgeleiden van $xu(x,y)$ naar y.

5. De divergentie van het vectorveld is $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 2z^2 + 2y - z^2 = 2y + z^2$. Omdat de divergentie er een stuk makkelijker uitziet, gebruiken we de divergentiestelling:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\mathcal{W}} \boldsymbol{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V\\ &= \iiint_{\mathcal{W}} 2y + z^2\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{W}} z^2\,\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

waarbij de term $2y$ in de integrand wegvalt omdat $\mathcal{W}$ symmetrisch is in y rond $y = 0$ en $2y$ een oneven functie in y is. Het gebied $\mathcal{W}$ laat zich het makkelijkst beschrijven in termen van bolcoördinaten, namelijk $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. De flux is dus:

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{W}} z^2\,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/3} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi/3}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\pi\cdot 4\cdot\frac{3}{4} = 6\pi.\end{aligned}$$

6. a. De stelling van Green zegt dat

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{r},$$

waarbij R het gebied ingesloten door $\mathcal{C}$ is. Gebruiken we de hint, dan volgt voor het linkerlid:

$$\begin{aligned}\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}A &= \iint_R \left(\frac{1}{2} - -\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}A \\ &= \iint_R \mathrm{d}A = \operatorname{opp}(R).\end{aligned}$$

Vervolgens bekijken we het rechterlid. Omdat op $\mathcal{C}$ de vergelijking $r = f(\theta)$ geldt, parametriseren we $\mathcal{C}$ met behulp van poolcoördinaten waarbij we r door $f(\theta)$ vervangen. Zo krijgen we de parametrisatie $\mathbf{r}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$ met $a \leq \theta \leq b$ en volgt:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_a^b \left(-\frac{1}{2} f(\theta)\sin\theta, \frac{1}{2} f(\theta)\cos\theta\right) \bullet (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\sin^2\theta - f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta + f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta + (f(\theta))^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\ \mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

wat volgens de stelling van Green gelijk is aan de oppervlakte van R.

b. We berekenen de oppervlakte van het ingesloten gebied met behulp van onderdeel a. Omdat $\sin\theta$ een periodieke functie in θ met periode 2π is, kiezen we $a = 0$ en $b = 2\pi$ (elke andere keuze voor a is ook goed zolang we maar $b = a + 2\pi$ kiezen). De oppervlakte is gelijk aan:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\sin\theta)^2\ \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$