Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 26 jan 2014 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

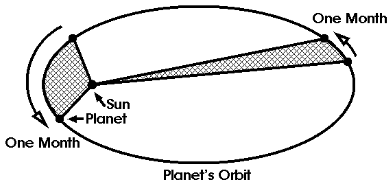
0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de lijn $\mathcal{L}$ gegeven door $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$, en het vlak $\mathcal{V}$ gegeven door $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = c$, met constante $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ en c.

   a. Veronderstel dat $\mathcal{L}$ en $\mathcal{V}$ precies één snijpunt hebben. Druk het snijpunt uit in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c. 4 pt.

   b. Geef precieze voorwaarden voor $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c opdat lijn en vlak *geen* gemeenschappelijke punten hebben. 4 pt.

2. Volgens Keplers tweede wet (perkenwet) beweegt een planeet P in haar baan om de zon F zodanig dat de voerstraal FP in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten bestrijkt.



   a. Laat zien dat het ellipsdeel $\mathrm{d}A$ dat de voerstraal $FP = \boldsymbol{r}$ in infinitesimaal tijdsinterval $\mathrm{d}t$ bestrijkt gelijk is aan $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}t$. 4 pt.
   Hint: gebruik meetkunde.

   b. Bewijs hiermee Keplers tweede wet. 4 pt.
   Hint: Keplers wet beweert iets over $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, en $\ddot{\boldsymbol{r}}$ is centraal gericht.

3. Van alle rechthoekige dozen met hetzelfde volume heeft de kubusvormige doos het kleinste oppervlak. Toon dit aan. 6 pt.

4. De kegel $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ doorsnijdt de sfeer met straal 1. Bereken het oppervlak van de sfeer binnen de kegel. 6 pt.

5. Integreer $\dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$ over de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(0, 1)$ en $(1, 1)$ in $\mathbb{R}^2$. *Hint: integratievolgorde.* 4 pt.

6. Beschouw een (begrensde) vlakke figuur $\mathcal{A}$ in het vlak $z = c$ voor een of andere $c > 0$. Verbind alle punten van $\mathcal{A}$ met de oorsprong O zodat je een kegelachtig lichaam $\mathcal{V}$ krijgt. Voor het volume V van $\mathcal{V}$ geldt $V = \frac{1}{3}cA$, waarin A het oppervlak van $\mathcal{A}$. Toon dit aan met het vectorveld $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ en een integraalstelling. 4 pt.

7. *NB: resultaten van deze opgave kunnen evt. in strijd lijken met de bestudeerde theorie, maar zijn dat niet.*

   We beschouwen het vectorveld $\boldsymbol{F}(x, y) = \dfrac{-y\hat{\mathbf{\imath}} + x\hat{\mathbf{\jmath}}}{x^2 + y^2}$ in $\mathbb{R}^2$ en de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $(0, 0)$ en straal R.

   a. Bereken rechtstreeks $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ waarbij $\mathcal{C}$ tegen klok wordt doorlopen. *LET OP: er komt geen nul uit.* 4 pt.

   b. Laat zien dat $\operatorname{grad} \arctan \dfrac{y}{x} = \boldsymbol{F}(x, y)$. 4 pt.

   c. Benoem (1 zin) en verklaar (max 2 zinnen) de paradox in deze opgave. 2 pt.