Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 26 jan 2014 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de lijn $\mathcal{L}$ gegeven door $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, en het vlak $\mathcal{V}$ gegeven door $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = c$, met constante $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ en c.

   a. Veronderstel dat $\mathcal{L}$ en $\mathcal{V}$ precies één snijpunt hebben. Druk het snijpunt uit in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c. 4 pt.

Oplossing: Als $\boldsymbol{x}$ het snijpunt is dan moet $\boldsymbol{x}$ aan beide vergelijkingen voldoen. Vul de vergelijking voor $\mathcal{L}$ in bij $\mathcal{V}$, dan krijg je $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) = c$. Inproduct uitwerken en oplossen voor λ geeft

$$\lambda = \frac{c - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}.$$

Hiermee kunnen we het snijpunt uitdrukken als

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \frac{c - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}.$$

Desgewenst kun je $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ nog schrijven als $|\boldsymbol{a}|^2$ maar nodig is dat niet.

Niet voldoende: snijpunt geven als $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = c$, want λ is parameter van de lijn en moet geëlimineerd.

b. Geef precieze voorwaarden voor $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c opdat lijn en vlak *geen* gemeenschappelijke punten hebben. 4 pt.

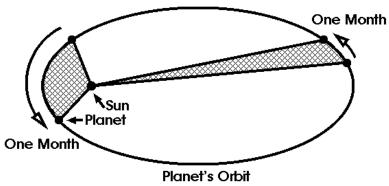
Oplossing: We moeten voor twee dingen zorgen: (i) de lijn ligt evenwijdig aan het vlak, (ii) maar niet erin.

Aangezien $\boldsymbol{a}$ normaalvector van $\mathcal{V}$ is en $\boldsymbol{b}$ richtvector van $\mathcal{L}$, voldoen we aan (i) precies als $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Om aan (ii) te voldoen is het nu genoeg om te zorgen dat er minstens één punt van $\mathcal{L}$ niet in $\mathcal{V}$ ligt: voor de overige punten geldt dat dan ook wegens (i). We nemen voor het gemak het punt met $\lambda = 0$, dus $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$; dit punt ligt *niet* in $\mathcal{V}$ als $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \neq c$. De benodigde eisen zijn dus $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ en $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \neq c$.

Normering: 1pt voor de opmerking dat $\mathcal{L}$ loodrecht op de normaal van $\mathcal{V}$.

Indien niet gezorgd is dat $\mathcal{L}$ en $\mathcal{V}$ disjunct zijn (geen punten gemeenschappelijk) dan is een belangrijke uitzondering gemist dwz max 2pt.

2. Volgens Keplers tweede wet (perkenwet) beweegt een planeet P in haar baan om de zon F zodanig dat de voerstraal FP in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten bestrijkt.



a. Laat zien dat het ellipsdeel $\mathrm{d}A$ dat de voerstraal $FP = \boldsymbol{r}$ in infinitesimaal tijdsinterval $\mathrm{d}t$ bestrijkt gelijk is aan $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}t$. 4 pt.
Hint: gebruik meetkunde.

Oplossing: Vat het "perkje" $\mathrm{d}A$ op als infinitesimaal driehoekje met hoekpunten F, P en P', waarbij P de positie van de planeet is na het tijdsinterval $\mathrm{d}t$. We weten zijde $FP = \boldsymbol{r}$ en bovendien zijde $PP' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ (snelheid keer tijdsinterval). Gebruikmakend van een bekende eigenschap van het uitproduct hebben we dus $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}t| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}t$.

Normering: verbinding leggen met driehoek is een goed beginnetje. Let erop dat de "baanzijde" PP' is $\dot{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}t$; er wordt weleens $\mathrm{d}t$ vergeten en die moet er dan later met een smoes weer bijgemoffeld worden; dat kun je zien als een niet goed weggewerkt "onmogelijk" tussenresultaat.

b. Bewijs hiermee Keplers tweede wet. 4 pt.
Hint: Keplers wet beweert iets over $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, en $\ddot{\boldsymbol{r}}$ is centraal gericht.

Oplossing: Interpretatie van de hint: "gelijke oppervlakken in gelijke tijdsintevallen" betekent dat $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ constant moet zijn, en op fysische gronden weten we dat de versnelling $\ddot{\boldsymbol{r}}$ van P naar F gericht is dwz evenwijdig aan $\boldsymbol{r}$.

Er geldt wegens onderdeel a: $2\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|$. Om de rechterkant te differentiëren merken we eerst op dat voor een willekeurige vectorfunctie $\boldsymbol{u}$ geldt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\cdot}\dot{\boldsymbol{u}}}{|\boldsymbol{u}|}$. Toepassen met $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ geeft $2\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\cdot}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|}$ waarin $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$, immers beide uitproducten worden genomen met evenwijdige vectoren. Maar dan is $\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2} = 0$, oftewel $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ constant, zoals vereist.

3. Van alle rechthoekige dozen met hetzelfde volume heeft de kubusvormige doos het kleinste oppervlak. Toon dit aan. 6 pt.

Oplossing: Noem de zijden van de doos x, y, z (alledrie > 0) en laat het volume $V = xyz$ zijn. We kunnen z uitdrukken als $z = \dfrac{V}{xy}$. Het oppervlak kunnen we nu schrijven als een functie f van x en y: $f(x, y) = 2(xy + xz + yz) = 2\left(xy + \dfrac{x+y}{xy}V\right)$. We gaan na of f een minimum heeft op het domein met $x > 0$, $y > 0$.

Enkele overwegingen: De factor 2 kunnen we weglaten, het maakt niet uit of je het halve of het hele oppervlak minimaliseert. Verder heeft f op het domein geen singuliere punten, en het domein is open. Extremen van f kunnen dus alleen optreden in kritieke punten.

In een kritiek punt geldt $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (0,0)$. We berekenen eerst $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{xy - (x+y)y}{x^2y^2}V = y\left(1 - \frac{V}{x^2y}\right).$$

Gebruikmakend van de symmetrie van f kunnen we nu direct opschrijven:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(1 - \frac{V}{xy^2}\right).$$

Aangezien $x = 0$ en $y = 0$ niet in het domein zitten, hebben we kritieke punten alleen als

$$x^2y = V \quad \text{en} \quad xy^2 = V.$$

Uit het verschil van deze vgl volgt $xy(x-y) = 0$ oftewel $x = y$, en dus met een van beide vgl $x = y = \sqrt[3]{V}$ en vervolgens ook $z = \sqrt[3]{V}$. Dit komt overeen met een kubus, maar we moeten nog wel laten zien dat we in een minimum zitten! Dit kan met de Hessiaan (veel werk $\rightarrow$ bah) of simpel met de observatie dat $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = +\infty$.

Normering: 4pt voor het correct opstellen van oppervlaktefunctie en vinden van kritiek punt, 2pt voor een redelijk betoog (hoeft niet perfect) dat het een minimum is; een erg goed betoog kan compensatie geven voor het 4pt-deel.

4. De kegel $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ doorsnijdt de sfeer met straal 1. Bereken het oppervlak van de sfeer binnen de kegel. 6 pt.

Oplossing: Noem het bedoelde sfeerkapje $\mathcal{S}$. De rand $\partial\mathcal{S}$ bestaat uit de punten die zowel op sfeer als kegelmantel liggen; deze punten voldoen dus zowel aan $x^2+y^2+z^2 = 1$ als aan $z^2 = x^2+y^2$ (met $z > 0$), oftewel de rand is een cirkel met $z^2 = x^2+y^2 = \frac{1}{2}$, oftewel een cirkel met straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het kapje $\mathcal{S}$ ligt aan de binnenkant van deze cirkel. Er zijn verschillende mogelijkheden om nu de oppervlakte $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$ te berekenen. Eén ervan is om $\mathcal{S}$ te beschrijven als het oppervlak $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ op het domein $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Met impliciet differentiëren vind je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$

en $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{y}{z}$ en volgens de hier van toepassing zijnde regel voor $\mathrm{d}S$ is dan

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}(x,y)\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\,\mathrm{d}(x,y)\\ &= \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}\,\mathrm{d}(x,y) = \sqrt{\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z}\,\mathrm{d}(x,y).\end{aligned}$$

Je kunt $\mathrm{d}S$ overigens ook vinden met de normaal $\boldsymbol{n}$ de sfeer: $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ waarin $|\boldsymbol{n}| = 1$ (straal van sfeer) en $\boldsymbol{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} = z$, zodat

$$\mathrm{d}S = \frac{|\boldsymbol{n}|}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{z}\mathrm{d}(x,y),$$

want $z > 0$.

Stappen we nu over op poolcoördinaten, dan krijgen we $D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $z = \sqrt{1-r^2}$ en de Jacobiaan is r, zodat:

$$\begin{aligned}S &= \iint_D \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left(-\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\pi(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+1) = \pi(2-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Een andere manier om de opp te berekenen is door rechtstreeks in bolcoördinaten te werken: neem $\rho = 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ en $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\mathrm{d}S = \sin\varphi\,\mathrm{d}(\varphi,\theta)$ en

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi(-\cos(\pi/4)+\cos(0)) = \pi(2-\sqrt{2}).$$

5. Integreer $\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ over de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$ en $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$. *Hint: integratievolgorde.* 4 pt.

Oplossing: Indachtig de hint kunnen we deze opgave naar keuze schrijven als $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{y^3}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ of als $\displaystyle\int_0^1\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Kies je de eerste optie, dan doe je al snel onplezierige ervaringen op, waarna je hopelijk toch maar eens de andere volgorde probeert:

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x &= y\int_0^y \frac{1}{1+(x/y)^2}\mathrm{d}x\\ &= y^2\arctan(x/y)\Big|_{x=0}^{x=y} = y^2(\arctan 1-\arctan 0) = \frac{\pi}{4}y^2.\end{aligned}$$

Vervolgens de buitenste integraal:

$$\frac{\pi}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{12}.$$

6. Beschouw een (begrensde) vlakke figuur $\mathcal{A}$ in het vlak $z = c$ voor een of andere $c > 0$. Verbind alle punten van $\mathcal{A}$ met de oorsprong O zodat je een kegelachtig lichaam $\mathcal{V}$ krijgt. Voor het volume V van $\mathcal{V}$ geldt $V = \frac{1}{3}cA$, waarin A het oppervlak van $\mathcal{A}$. Toon dit aan met het vectorveld $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ en een integraalstelling. 4 pt.

Oplossing: Voor dit vectorveld hebben we $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3$ dus met de stelling van Gauß kunnen we schrijven

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V = \frac{1}{3}\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\iint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Merk nu op dat $\partial\mathcal{V}$ uit twee delen bestaat: het oppervlak $\mathcal{A}$ en de "mantel" die punten op $\partial\mathcal{A}$ verbindt met O.

Voor alle punten P van de mantel geldt: $\boldsymbol{F}(P) = OP$, en als $\boldsymbol{N}$ een (eenheids-)normaalvector op de mantel in P is, dan staat $\boldsymbol{N}$ loodrecht op OP. Dus is $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} = 0$, en de flux van $\boldsymbol{F}$ door de mantel is dus 0.

Voor alle punten P van $\mathcal{A}$ geldt ook dat $\boldsymbol{F}(P) = OP$, maar hier hebben we als eenheids-normaalvector $\hat{\mathbf{k}}$, immers $\mathcal{A}$ ligt evenwijdig aan het xy-vlak. Dus is $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}\cdot\hat{\mathbf{k}} = c$, de z-coordinaat van P.

We krijgen nu

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\iint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{A}} \boldsymbol{F}\cdot \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}c\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S = \frac{1}{3}cA, \end{aligned}$$

zoals we moesten aantonen.

Menigeen berekent de flux door $\mathcal{A}$, ziet dat "het klopt" en stopt acuut met nadenken... dus mantel vergeten en max 2pt.

7. *NB: resultaten van deze opgave kunnen evt. in strijd lijken met de bestudeerde theorie, maar zijn dat niet.*

   We beschouwen het vectorveld $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$ en de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $(0,0)$ en straal R.

   a. Bereken rechtstreeks $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ waarbij $\mathcal{C}$ tegen klok wordt doorlopen. *LET OP: er komt geen nul uit.* 4 pt.

   Oplossing: We kunnen parametriseren met $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ waarbij $0 \le t \le 2\pi$. We hebben dan ook $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}})\mathrm{d}t = R(-\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}})\mathrm{d}t$. Zodoende vinden we

   $$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{R(-\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}})}{R^2}\cdot R(-\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

   b. Laat zien dat $\operatorname{grad}\arctan\dfrac{y}{x} = \boldsymbol{F}(x,y)$. 4 pt.

   Oplossing: Schrijf evt. $u(x,y) = y/x$ en gebruik de kettingregel:

   $$\operatorname{grad}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

waarin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

zodat

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \arctan \frac{y}{x} &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\hat{\mathbf{\imath}} + \frac{1}{x}\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\hat{\mathbf{\imath}} + x\hat{\mathbf{k}}\right) = \boldsymbol{F}(x,y). \end{aligned}$$

(Het kan ook rechtsreeks zonder u)

c. Benoem (1 zin) en verklaar (max 2 zinnen) de paradox in deze opgave. 2 pt.

Oplossing: Paradox: Het vectorveld $\boldsymbol{F}$ heeft een potentiaal, maar toch is de kringintegraal van $\boldsymbol{F}$ langs de kromme $\mathcal{C}$ niet 0.

Oplossing: $\boldsymbol{F}$ is niet gedefiniëerd in $(0,0)$ en $\mathcal{C}$ loopt om dit punt heen. Het gebied waarin we de kringintegraal nemen is dus niet enkelvoudig samenhangend.