Hertentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 11 maart 2013 15:00 – 18:00

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk. Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 46 punten.

1. (4pt)
Bepaal voor welke waarde(n) van a het onderstaande stelsel *geen* oplossingen heeft:

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + ay - z &= -2 \\ x + 2y + az &= -1 \end{aligned}$$

2. (4pt)
Een massadeeltje P beweegt in het xy-vlak. Laat $\mathbf{r}(t)$ de plaats van P op tijdstip t zijn. We gebruiken poolcoördinaten en definiëren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}, \end{aligned}$$

waarin θ de hoekcoordinaat van P is. Druk de plaats, snelheid en versnelling van P uit in de vectoren $\hat{\mathbf{r}}$ en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3. (4pt, 4pt)
Gegeven $f(x, y) = \log\left((1 + x^2)(1 + y^2)\right)$ op het domein met $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

a. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(-1, 0)$ langs de richting $(1, 2)$.

b. Ga na of, en zo ja waar, f maxima en/of minima heeft.

4. (4pt, 4pt)
Laat $f(x,y)$ een harmonische functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ zijn, en definieer de functie g van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$ door $g(x,y,z) = f(ax+by,\, cz)$.

a. Waaraan moeten a, b, c voldoen opdat g harmonisch is?

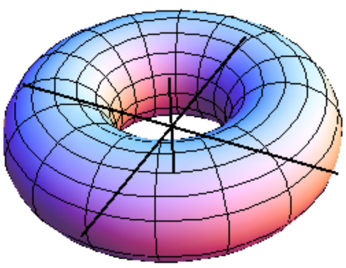
b. Toon aan dat $g(x,y,z) = \mathrm{e}^{4x-3y}\cos(5z)$ harmonisch is.

(Ter herinnering: een harmonische functie voldoet aan de Laplacevergelijking.)

5. (6pt)
Het oppervlak van een torus (donut, fietsband) wordt geparametriseerd door

$$((R+\cos\phi)\cos\theta,\ (R+\cos\phi)\sin\theta,\ \sin\phi)$$

waarin $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, en R constant ($R > 1$). Bereken het oppervlak van de torus. (Hint: normaalvector)



6. (4pt, 4pt)
Stel ϕ en ψ zijn scalarvelden gegeven door $\phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ en $\psi(x,y,z) = x+y+z$; laat $\mathbf{v} = \nabla\phi \times \nabla\psi$.

a. Bereken $\mathbf{v}$ en laat zien dat $\mathbf{v}$ divergentievrij (Engels: solenoid) is.

b. Vind een vectorpotentiaal voor $\mathbf{v}$ d.w.z. vind een vectorveld $\mathbf{F}$ waarvoor geldt $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{v}$. Laat zien dat je oplossing voldoet.

7. (4pt, 4pt)
Beschouw het vectorveld $\mathbf{F} = (x+y^2,\, 3x^2y+y^3-x^3,\, z+1)$,
de cirkelschijf S gegeven door de vergelijking $x^2+y^2 \leq a^2$,
en de kegelmantel K met top $(0,0,b)$ en rand $x^2+y^2 = a^2$.

a. Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door S.

b. Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door K met behulp van een integraalstelling.