

Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2
Ma 10 maart 2014 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 36 punten.

1. (4pt)

Bereken het volume van het viervlak met hoekpunten $(1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$, $(3, 4, -2)$, $(2, 2, 2)$. Hint: determinant.

2. (4pt, 4pt)

Gegeven is de functie $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}$.

- a. Bepaal en teken in één figuur de niveaукrommen $f(x, y) = -2$ en $f(x, y) = 4$.
- b. Bepaal $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, of leg uit waarom deze limiet niet bestaat.

3. (4pt, 4pt)

Een massa glijdt onder invloed van de zwaartekracht langs een goot met parametrisering $(a \cos t, a \sin t, bt)$ met $a > 0$, $b > 0$, en $0 \leq t \leq 6\pi$. Zoals bekend ondervindt een voorwerp met massa m en hoogte boven het aardoppervlak z een zwaartekracht ter grootte van mg in de negatieve z -richting. We herinneren ook aan de definitie van arbeid $W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

- a. Laat zien dat $-mgz$ een potentiaal is van het zwaartekrachtveld. Waarom geldt DUS dat de zwaartekracht conservatief is? Bereken de arbeid die de zwaartekracht verricht.
- b. Bereken de arbeid die nodig is om een wrijving van constante grootte R en tegengesteld gericht aan de snelheid te overwinnen.

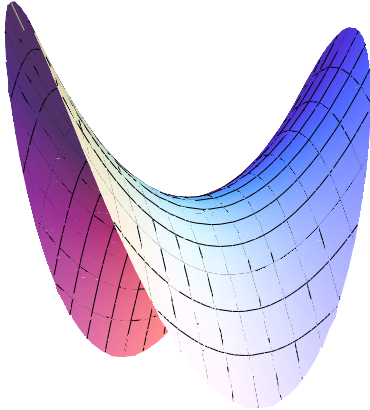
Z.O.Z.

4. (4pt)

Laat duidelijk zien dat $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$.

5. (4pt)

Bereken het oppervlak van het deel van de grafiek $z = x^2 - y^2$ dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ ligt.



6. (4pt)

Laat \mathcal{C} de doorsnijding zijn van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en het vlak $x + y + z = 0$. Gebruik de stelling van Stokes om te laten zien dat

$$\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \pm \sqrt{3} \pi a^2,$$

waarin het teken slechts afhangt van de orientatie van \mathcal{C} .

7. (4pt)

(*Golfvergelijking in 1 dimensie*) Laat zien dat

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (p(x - ct) + p(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} q(s) \, ds$$

een oplossing is van het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= p(x), \\ \partial_t u(x, 0) &= q(x), \\ \partial_{tt} u(x, t) &= c^2 \partial_{xx} u(x, t). \end{aligned}$$