Wiskundige Technieken 2
Uitwerkingen Hertentamen 10 maart 2014

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met 1 of 2 onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	wel begrepen, maar slordig uitgevoerd, details niet goed in de vingers, of slechte notaties
2pt	grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking; onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. We bepalen eerst drie vectoren, die drie van de vier ribben van het viervlak beschrijven:

$$\begin{aligned}(4,-1,1)-(1,2,1) &= (3,-3,0),\\ (3,4,-2)-(1,2,1) &= (2,2,-3),\\ (2,2,2)-(1,2,1) &= (1,0,1).\end{aligned}$$

De drie vectoren $(3,-3,0)$, $(2,2,-3)$ en $(1,0,1)$ spannen een parallellepipedum (dit is dus niet hetzelfde als een viervlak) op, waarvan het volume gelijk is aan:

$$\begin{aligned}\left\|\begin{matrix}3 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\| &= \left|\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right|\\ &= \left|\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-5\\-2\end{pmatrix}\right| = |-21| = 21.\end{aligned}$$

Het volume van het gegeven viervlak is precies een zesde deel hiervan. Het viervlak heeft dus volume $\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$.

Opmerking:
Je mag natuurlijk ook de determinant bepalen door te ontwikkelen langs een rij of kolom. Ontwikkelen naar de eerste rij geeft:

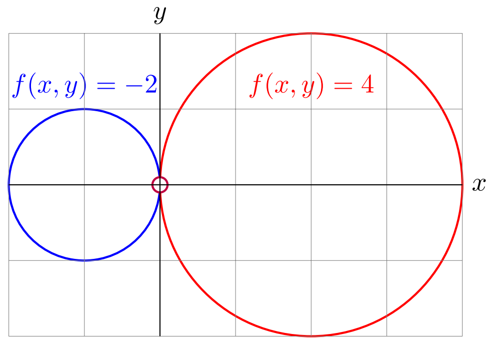
$$\begin{aligned}\left\|\begin{matrix}3 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\| &= \left|3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right|\\ &= |3\cdot 2+3\cdot 5| = 21.\end{aligned}$$

2. a. Merk allereerst op dat het domein van $f(x,y)$ precies alles behalve de y-as is (want dan is de noemer nul). We zullen de opgave iets algemener aanpakken en bepalen hoe de niveaukrommen $f(x,y)=C$ voor alle waarden voor C eruitzien (als je dat eng vindt mag je natuurlijk steeds $C=-2$ en $C=4$ substitueren):

$$\begin{aligned}f(x,y) &= C,\\ \frac{x^2+y^2}{x} &= C,\\ x^2+y^2 &= Cx,\\ x^2-Cx+y^2 &= 0,\\ \left(x-\frac{C}{2}\right)^2-\frac{C^2}{4}+y^2 &= 0,\\ \left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2 &= \frac{C^2}{4},\end{aligned}$$

waarbij we in de stap van de vierde regel naar de vijfde regel kwadraatafsplitsen gebruiken. We zien dat de niveaukromme $f(x,y)=C$ precies bestaat uit alle punten op de cirkel met middelpunt $(\frac{C}{2},0)$ en straal $\frac{|C|}{2}$ die *niet* op de y-as liggen.

De twee gevraagde niveaukrommen zien er als volgt uit:



b. Uit onderdeel a volgt dat het mogelijk is om het punt $(0, 0)$ te benaderen door langs de niveaukrommen $f(x, y) = -2$ en $f(x, y) = 4$ te lopen. Lopen we langs de kromme $f(x, y) = -2$, dan vinden we de limietwaarde -2. Op dezelfde manier vinden we de limietwaarde 4 door langs de kromme $f(x, y) = 4$ te lopen. Omdat $-2 \neq 4$ geldt, volgt dat de gevraagde limiet niet bestaat.

Opmerking:
Het is ook mogelijk om dit onderdeel op te lossen zonder gebruik te maken van onderdeel a. Loop allereerst langs de lijn $y = 0$, dan vinden we:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \;=\; \lim_{x\to 0} f(x, 0) \;=\; \lim_{x\to 0} x \;=\; 0.$$

Loop vervolgens langs de kromme $y = \sqrt{x}$, dan vinden we:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \;=\; \lim_{x\downarrow 0} f(x, \sqrt{x}) \;=\; \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} \;=\; \lim_{x\downarrow 0} 1 + x \;=\; 1.$$

Omdat $0 \neq 1$ geldt, concluderen we dat de gevraagde limiet niet bestaat.

3. a. Zoals beschreven in de opgave is het zwaartekrachtveld gelijk aan $\mathbf{F}(x, y, z) = -mg\mathbf{k}$. We laten zien dat $\varphi(x, y, z) = -mgz$ een potentiaal is van het zwaartekrachtveld:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 0 \;=\; \mathbf{F}_1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 0 \;=\; \mathbf{F}_2, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -mg \;=\; \mathbf{F}_3. \end{aligned}$$

Omdat bovendien het domein van het zwaartekrachtveld enkelvoudig samenhangend is, volgt nu dat de zwaartekracht conservatief is.
De baan die de massa aflegt, deze noemen we $\mathcal{C}$, begint in het punt $(a, 0, 6\pi b)$ en eindigt in het punt $(a, 0, 0)$. Omdat de zwaartekracht conservatief is, is de verrichte arbeid dus:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} \;=\; \varphi(a, 0, 0) - \varphi(a, 0, 6\pi b) \;=\; 6\pi mgb.$$

b. De snelheidsvector van de massa is $\mathbf{v}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ en de lengte van deze vector is $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Omdat de wrijving steeds tegengesteld is aan de snelheid, wijst de wrijving dus steeds in de richting $-\mathbf{v}$. Omdat de wrijving een constante grootte heeft, volgt nu dat de wrijving $\mathbf{F}$ gelijk is aan (we delen door $|\mathbf{v}|$, omdat $\mathbf{v}$ niet noodzakelijk lengte 1 heeft):

$$\mathbf{F} \;=\; R \cdot \frac{-\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \;=\; \frac{-R}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{v}.$$

De benodigde arbeid om deze wrijving te overwinnen is dus

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{6\pi}^{0} \frac{-R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_{0}^{6\pi} |\mathbf{v}|^2 \,\mathrm{d}t \\ &= R\sqrt{a^2 + b^2} \int_{0}^{6\pi} \mathrm{d}t \;=\; 6\pi R\sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

4. Dit volgt met behulp van de productregel en door zeer zorgvuldig te werk te gaan:

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \nabla \bullet (F_2G_3 - F_3G_2,\ F_3G_1 - F_1G_3,\ F_1G_2 - F_2G_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(F_2G_3 - F_3G_2) + \frac{\partial}{\partial y}(F_3G_1 - F_1G_3) + \frac{\partial}{\partial z}(F_1G_2 - F_2G_1) \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)G_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)G_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)G_3 \\
&\quad -F_1\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) - F_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) - F_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})\,.
\end{aligned}$$

5. Het deel van de grafiek waarvan we oppervlakte moeten berekenen noemen we $\mathcal{S}$. We parametriseren $\mathcal{S}$ als $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, u^2 - v^2\big)$. Het oppervlakelement dS wordt dan:

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}A = |(-2u, 2v, 1)|\,\mathrm{d}A = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\,\mathrm{d}A.$$

De oppervlakte van $\mathcal{S}$ is nu te berekenen door over te gaan op poolcoördinaten. We vinden dan:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S &= \iint_{u^2+v^2 \le a^2} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_1^{4a^2+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} \left(4a^2+1\right)^{3/2} - 1\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}\left(\left(4a^2+1\right)^{3/2} - 1\right),
\end{aligned}$$

waarbij we de substitutieregel met $t = 4r^2 + 1$ (en $\mathrm{d}t = 8r\,\mathrm{d}r$) gebruiken.

6. Het deel van het vlak $x + y + z = 0$ dat binnen het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ligt noemen we $\mathcal{S}$. De stelling van Stokes zegt dat

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S.$$

Het vectorveld dat we integreren is $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ en de eenheidsnormaal op $\mathcal{S}$ is $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, waar het teken afhangt van de oriëntatie van $\mathcal{C}$. Omdat verder $\operatorname{curl}\mathbf{F} = (-1,-1,-1)$ geldt, volgt nu met de stelling van Stokes dat:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z &= \iint_{\mathcal{S}} (-1,-1,-1) \bullet \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\mathrm{d}A \\
&= \pm\sqrt{3}\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}A = \pm\sqrt{3}\pi a^2,
\end{aligned}$$

waar de waarde van de laatste integraal direct volgt uit het feit dat $\mathcal{S}$ een cirkel met straal a is.

7. We gaan na dat de gegeven formule voor $u(x,t)$ aan de drie gegeven vergelijkingen voldoet. De eerste is het makkelijkst:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}\left(p(x)+p(x)\right)+\frac{1}{2c}\int_x^x q(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{2p(x)}{2}+\frac{1}{2c}\cdot 0 \;=\; p(x). \end{aligned}$$

De tweede vergt iets meer werk. We bepalen eerst de afgeleide $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(-cp'(x-ct)+cp'(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(cq(x+ct)-(-c)q(x-ct)\right) \\ &= \frac{c}{2}\left(-p'(x-ct)+p'(x+ct)\right)+\frac{1}{2}\left(q(x+ct)+q(x-ct)\right), \end{aligned}$$

waarbij we bij het differentiëren van de integraal gebruik hebben gemaakt van de hoofdstelling der infinitesimaalrekening (stelling 5.5.5 in het boek). Nu volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \;=\; \frac{c}{2}\left(-p'(x)+p'(x)\right)+\frac{1}{2}\left(q(x)+q(x)\right) \;=\; q(x).$$

Tenslotte gaan we na dat de gegeven oplossing voldoet aan de derde vergelijking. Allereerst bepalen we $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c}{2}\left(-p'(x-ct)+p'(x+ct)\right)+\frac{1}{2}\left(q(x+ct)+q(x-ct)\right)\right] \\ &= \frac{c}{2}\left(-c\cdot -p''(x-ct)+c\cdot p''(x+ct)\right)+\frac{1}{2}\left(cq'(x+ct)+-cq'(x-ct)\right) \\ &= \frac{c^2}{2}\left(p''(x-ct)+p''(x+ct)\right)+\frac{c}{2}\left(q'(x+ct)-q'(x-ct)\right) \\ &= c^2\left(\frac{1}{2}\left(p''(x-ct)+p''(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(q'(x+ct)-q'(x-ct)\right)\right). \end{aligned}$$

We hoeven nu alleen nog maar te laten zien dat het geheel tussen de haakjes op de laatste regel hierboven precies $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ is. We bepalen eerst de afgeleide $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(p'(x-ct)+p'(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(q(x+ct)-q(x-ct)\right)$$

en dus volgt voor de tweede orde partieel afgeleide:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(p''(x-ct)+p''(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(q'(x+ct)-q'(x-ct)\right),$$

wat precies is wat we nog moesten aantonen. We concluderen dat de gegeven formule voor $u(x,t)$ inderdaad een oplossing is van het beginwaardeprobleem.