Wiskundige Technieken 2
Uitwerkingen Tentamen 27 januari 2014

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met 1 of 2 onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	wel begrepen, maar slordig uitgevoerd, details niet goed in de vingers, of slechte notaties
2pt	grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking; onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. a. Door het stelsel een beetje te vegen vinden we:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 21 & 2 \\ 1 & 4 & 49 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3^*=R_3-R_1]{R_2^*=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 42 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3^{**}=R_3^*-3R_2^*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

De laatste vergelijking is nu $0 = -8$, wat uiteraard onjuist is. Dit stelsel is dus strijdig en heeft dus geen oplossingen.

b. We vegen het stelsel met dezelfde stappen als bij onderdeel a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 21 & 0 \\ 1 & 4 & 49 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3^*=R_3-R_1]{R_2^*=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 1 \\ 0 & 3 & 42 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3^{**}=R_3^*-3R_2^*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De laatste vergelijking luidt nu $0 = 0$, wat klopt. Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen die we gaan parametriseren. Kiezen we $x_3 = t$ (we kiezen voor x_3 zodat we later niet hoeven te delen door 7 en 14), volgt uit de tweede vergelijking dat $x_2 = 1 - 14x_3 = 1 - 14t$ en uit de eerste vergelijking

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - x_2 - 7x_3 \\ &= -1 - (1 - 14t) - 7t \;=\; 7t - 2. \end{aligned}$$

De oplossingen van dit stelsel zijn dus $(x_1, x_2, x_3) = (7t - 2, 1 - 14t, t)$ met $t \in \mathbb{R}$.

2. De functie $f(x, y)$ is continu (want het is een product van veeltermen in x en y) en het gebied waar we ons op richten is gesloten, dus neemt $f(x, y)$ een absoluut minimum en absoluut maximum op dit gebied aan. Er zijn drie soorten punten die we daarvoor moeten bekijken: kritieke punten (daar waar de gradiënt de nulvector is), singuliere punten (daar waar de gradiënt niet bestaat) en de randpunten.

i. **Kritieke punten**
Allereerst bepalen we de gradiënt van $f(x, y)$. Hier is het belangrijk om in te zien dat één van de drie factoren niet afhangt van x (en hetzelfde geldt voor y) en dat we dus *niet* haakjes hoeven weg te werken. We berekenen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (1-y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x(y-x)\right] \\ &= (1-y)\left(y - x + (-x)\right) \;=\; (1-y)(y-2x), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[(y-x)(1-y)\right] \\ &= x\left(1 - y + (-(y-x))\right) \;=\; x(x-2y+1), \end{aligned}$$

dus $\nabla f(x, y) = ((1-y)(y-2x),\; x(x-2y+1))$. Uit $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ volgt direct dat $y = 1$ of $y = 2x$ (dit is de reden dat we de haakjes hebben laten staan). Deze twee oplossingen substitueren we in de vergelijking $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. De substitutie $y = 1$ in deze vergelijking leidt tot:

$$\begin{aligned} x(x-2y+1) &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{of} \quad x = 1, \end{aligned}$$

wat betekent dat $(0,1)$ en $(1,1)$ kritieke punten zijn. De substitutie $y = 2x$ leidt tot:

$$\begin{aligned} x(x-2y+1) &= 0 \\ x(-3x+1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{of} \quad x &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wat betekent dat $(0,0)$ en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ook kritieke punten zijn.

ii. **Singuliere punten**
De gradiënt $\nabla f(x,y) = ((1-y)(y-2x),\ x(x-2y+1))$ bestaat overal, dus zijn er geen singuliere punten.

iii. **Randpunten**
De rand van het gesloten vierkant bestaat uit de vier zijden van het vierkant (dus niet alleen de hoekpunten). We bekijken het gedrag van de functie op elk van de vier randen apart:

- Op de rand met $x = 0$ geldt $f(0,y) = 0$, de functie is dus constant op dit lijnstuk.
- Op de rand met $x = 1$ geldt $f(1,y) = (y-1)(1-y) = -(1-y)^2$, welke maximaal is voor $y = 1$ en minimaal voor $y = 0$. Het punt dat bij het maximum hoort, namelijk het punt $(1,1)$, is al een bekend punt (het is een kritiek punt van f). Het punt dat bij het minimum hoort, namelijk $(1,0)$, is een nieuw punt.
- Op de rand met $y = 0$ geldt $f(x,0) = -x^2$, welke maximaal is voor $x = 0$ en minimaal voor $x = 1$. De bijbehorende punten $(0,0)$ en $(1,0)$ zijn al bekend.
- Op de rand met $y = 1$ geldt $f(x,1) = 0$, de functie is hier dus ook constant.

We weten nu dus waar de absolute extremen zich kunnen bevinden, namelijk in de punten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, en op de lijnstukken met $x = 0$ en $y = 1$. Omdat we alleen maar zoeken naar de absolute extremen volstaat het om de functiewaarden in elk van deze punten te berekenen (de Hessiaan is dus niet nodig). Er geldt: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = -1$, $f(0,1) = 0$, $f(1,1) = 0$, $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$ en op beide lijnstukken geldt $f(x,y) = 0$. Conclusie: het absoluut minimum van $f(x,y)$ op het gesloten vierkant is -1 en het absoluut maximum van $f(x,y)$ op hetzelfde gesloten vierkant is $\frac{1}{27}$.

3. Het lichaam R laat zich het makkelijkst uitdrukken in cilindercoördinaten, dan geldt namelijk $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$ en $0 \le z \le 3 + r\sin\theta$. De gevraagde integraal is dus:

$$\begin{aligned} \iiint_R y \,\mathrm{d}V &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{3+r\sin\theta} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^\pi 3r^2\sin\theta + r^3\sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^\pi 3r^2\sin\theta + \frac{1}{2}r^3 - \frac{1}{2}r^3\cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 6r^2 + \frac{\pi}{2}r^3 \,\mathrm{d}r \;=\; 16 + 2\pi. \end{aligned}$$

4. *Opmerking:*
Deze opgave is gebaseerd op werkcollegeopgave 16.2.9.

a. Dit volgt met behulp van de productregel:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet (\varphi\mathbf{F}) &= \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_3)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{F}_1 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{F}_2 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{F}_3 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{F}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{F}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{F}_3 + \varphi\left(\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial z}\right) \\ &= \nabla\varphi \bullet \mathbf{F} + \varphi\,(\nabla \bullet \mathbf{F})\,. \end{aligned}$$

b. Gebruik het resultaat van onderdeel a, met $\varphi = \varphi(r)$ en $\mathbf{F} = \mathbf{r}$, dan volgt:

$$\nabla \bullet (\varphi(r)\mathbf{r}) \;=\; \nabla\varphi(r) \bullet \mathbf{r} + \varphi(r)\,(\nabla \bullet \mathbf{r})\,.$$

We moeten één gradiënt en één divergentie berekenen. De divergentie is het makkelijkst:

$$\nabla \bullet \mathbf{r} \;=\; \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \;=\; 3.$$

De gradiënt berekenen we met behulp van de kettingregel:

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\varphi'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathbf{i} + \left(\varphi'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\varphi'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathbf{k} \\
&= \frac{\varphi'(r)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right) \;=\; \frac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Nu vullen we dit alles in:

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (\varphi(r)\mathbf{r}) &= \nabla\varphi(r) \bullet \mathbf{r} + \varphi(r)\,(\nabla \bullet \mathbf{r}) \\
&= \frac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} + \varphi(r)\cdot 3 \\
&= \frac{r^2}{r}\varphi'(r) + 3\varphi(r) \;=\; r\varphi'(r) + 3\varphi(r),
\end{aligned}$$

waarmee de gelijkheid is aangetoond.

c. Als $\varphi(r)\mathbf{r}$ divergentievrij is, dan volgt uit onderdeel b dat

$$r\varphi'(r) + 3\varphi(r) \;=\; 0$$

moet gelden. Deze differentiaalvergelijking lossen we op met scheiding van variabelen:

$$\begin{aligned}
r\varphi'(r) + 3\varphi(r) &= 0, \\
r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + 3\varphi &= 0, \\
r\,\mathrm{d}\varphi &= -3\varphi\,\mathrm{d}r, \\
\frac{d\varphi}{\varphi} &= -3\frac{\mathrm{d}r}{r}, \\
\log\varphi &= -3\log r + C_1 \;=\; C_1 + \log r^{-3}, \\
\varphi &= Cr^{-3},
\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = e^{C_1}$ kiezen.

5. a. Aangezien er geldt $\operatorname{curl}\mathbf{F} = (0-0)\,\mathbf{i} + (-2z-(-2z))\,\mathbf{j} + (4y-4y)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (op alle enkelvoudig samenhangende gebieden), is $\mathbf{F}$ conservatief. Een potentiaal φ vinden we door op te lossen:

$$\begin{cases}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2y^2 - z^2, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4xy, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z^3}{3} - 2xz.
\end{cases}$$

Integreren we de eerste vergelijking naar x, dan vinden we $\varphi(x,y,z) = 2xy^2 - xz^2 + C(y,z)$. Leiden we dit weer af naar y, dan vinden we:

$$4xy \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial y} \;=\; 4xy + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z),$$

wat betekent dat $\frac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$, dus $C(y,z) = C(z)$ (de constante hangt niet van y af). Leid nu φ af naar z, dan vinden we

$$\frac{z^3}{3} - 2xz \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial z} \;=\; -2xz + \frac{\partial}{\partial z}C(z),$$

ofwel $C(z) \;=\; \int \frac{z^3}{3}\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{z^4}{12} + C$. Een potentiaal voor het vectorveld is dus $\varphi(x,y,z) = 2xy^2 - xz^2 + \frac{z^4}{12}$.

b. Omdat het vectorveld conservatief is, bepalen we de integraal eenvoudig met behulp van de potentiaal:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \varphi(0,2,4) - \varphi(2,0,4) \\ &= \left(0 - 0 + \frac{4^4}{12}\right) - \left(0 - 32 + \frac{4^4}{12}\right) \;=\; 32.\end{aligned}$$

Opmerking 1:
Omdat er in de vraag geen richting is meegegeven, kan men ook de integraal in de tegengestelde richting bepalen. Het antwoord is dan -32.

Opmerking 2:
Het is ook mogelijk om de lijnintegraal te bepalen door te parametriseren. Parametriseer het pad als $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$ met $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Dan volgt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(8\sin^2 t - 16, 16\cos t \sin t, \frac{64}{3} - 16\cos t\right) \bullet (-2\sin t, 2\cos t, 0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} -16\sin^3 t + 32\sin t + 32\cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} -16\left(1 - \cos^2 t\right)\sin t + 32\sin t + 32\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 16\int_0^{\pi/2} \sin t + 3\cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t \;=\; 16 \cdot -(-2) \;=\; 32.\end{aligned}$$

Dit levert echter veel meer werk op dan bij het gebruik van de potentiaal.

c. Noem het boloppervlak $\mathcal{S}$ en de bol W, dan zegt de divergentiestelling het volgende over de flux:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} \;=\; \iiint_W \nabla \bullet \mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$$

We bepalen de flux door de rechterintegraal te berekenen. De divergentie is $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0 + 4x + (z^2 - 2x) = 2x + z^2$ en dus is de flux

$$\iiint_W 2x + z^2\,\mathrm{d}V \;=\; \iiint_W z^2\,\mathrm{d}V,$$

waar we in de laatste stap gebruiken dat W symmetrisch is in x en dat $2x$ een oneven functie in x is. De overgebleven integraal berekenen we met behulp van bolcoördinaten:

$$\begin{aligned}\iiint_W z^2\,\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \rho^4\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \frac{1}{5}\cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \;=\; \frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

6. Om na te gaan dat $\mathbf{r} - t\mathbf{v}$ constante lengte heeft, is het voldoende om aan te tonen dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r} - t\mathbf{v}|^2 = 0$ voor alle t (we kijken naar de lengte in het kwadraat omdat we dan niet moeilijk hoeven te doen met wortels; dit geeft verder ook geen problemen omdat lengtes niet negatief kunnen zijn). De afgeleide is:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r} - t\mathbf{v}|^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathbf{r} - t\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{r} - t\mathbf{v})\right) \\ &= 2(\mathbf{r} - t\mathbf{v}) \bullet \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} - t\mathbf{v}) \\ &= 2(\mathbf{r} - t\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{v} - (\mathbf{v} + t\mathbf{a})) \\ &= 2(\mathbf{r} - t\mathbf{v}) \bullet -t\mathbf{a} \\ &= -2t(\mathbf{r} \bullet \mathbf{a}) + 2t^2(\mathbf{v} \bullet \mathbf{a}) \;=\; 0,\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruiken dat $\mathbf{a}$ loodrecht staat op zowel $\mathbf{r}$ als $\mathbf{v}$, dus $\mathbf{r} \bullet \mathbf{a} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = 0$.

Opmerking:
Deze opgave is gebaseerd op werkcollegeopgave CR12.1.