Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 26 jan 2014 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 48 punten.

1. Op $\mathbb{R}^2$ voeren we een transformatie uit die bestaat uit *eerst* een rotatie tegen de klok in over een hoek $\frac{\pi}{4}$, *daarna* spiegeling in de x-as. Deze transformatie kunnen we weergeven met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   a. Laat zien dat A de transformatie goed weergeeft door te onderzoeken hoe A en de beschreven transformatie opereren op de basisvectoren. 4 pt.

   b. Bepaal de inverse van A. 4 pt.

2. Bekijk de functie $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$ op alle punten van $\mathbb{R}^2$ waar dat zin heeft.

   a. Beredeneer dat eventuele absolute extremen van $f(x,y)$ alleen in kritieke punten kunnen worden aangenomen, *zonder* deze punten expliciet te berekenen. 4 pt.

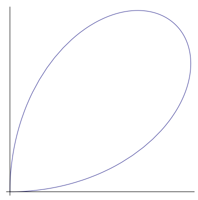
   b. Laat zien of $f(x,y)$ absolute extremen heeft, en zo ja welke. 4 pt.

3. Laat (r,θ) de poolcoördinaten van $\boldsymbol{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ zijn. We gebruiken de notaties $\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ en $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \dfrac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{r}$, dus $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is ten opzichte van $\hat{\boldsymbol{r}}$ in positieve zin gedraaid over hoek $\pi/2$.

   a. Laat zien dat $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{r^2}$ en $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{r^2}$. 4 pt.

   b. Zij f een gladde functie op $\mathbb{R}^2$. Druk $\operatorname{grad} f$ uit in poolcoördinaten d.w.z. met partiële afgeleiden naar r, θ en met gebruik van $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. 4 pt.

4. *Deze opgave kan tevens tellen als reparatie van de tweede tussentoets.* 6 pt.
Bereken het volume binnen de kegel $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ en het cylinderachtige voorwerp begrensd door het oppervlak $(x^2 + y^2)^3 = (2xy)^2$, met $x \geq 0$, $y \geq 0$. Zie figuur voor de cylinderwand in het xy-vlak.



5. Zij $\mathcal{S}$ het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 13$ boven het xy-vlak en $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{\hat{\imath}} + (x^3 + y)\mathbf{\hat{\jmath}} + (z - xy)\mathbf{\hat{k}}$. 6 pt.
Bereken $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \boldsymbol{F} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. *Hint: Stokes.*

6. Zij D een enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbb{R}^3$ met rand ∂D. Zij verder $\varphi(x, y, z)$ een gladde scalaire functie en $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ een glad vectorveld.
   a. Laat zien dat $\nabla \bullet (\varphi \boldsymbol{F}) = (\nabla \varphi) \bullet \boldsymbol{F} + \varphi(\nabla \bullet \boldsymbol{F})$. 4 pt.
   b. Laat vervolgens zien dat 4 pt.
$$\iiint_D \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V + \iiint_D \operatorname{grad} \varphi \bullet \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial D} \varphi \boldsymbol{F} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$
   c. Veronderstel nu $\varphi(x, y, z) = 0$ op ∂D en bovendien dat φ harmonisch is op D (d.w.z. φ voldoet aan de Laplacevergelijking $\Delta \varphi = 0$). 4 pt.
   Toon aan dat $\varphi(x, y, z) = 0$ op heel D.
   Hint: gebruik onderdeel b met $\boldsymbol{F} = \nabla \varphi$.