Hertentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 21 maart 2016 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op;
gooit stukken theorie doorelkaar (klok-klepel-verhaal).

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

1. Een lijn gaat door de punten $(2, -1, -1)$ en $(2, 1, 1)$. Vind van deze lijn twee verschillende vectorvoorstellingen $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$, met verschillende vectoren $\boldsymbol{a}$ en verschillende vectoren $\boldsymbol{b}$. 4 pt.

Oplossing: In de uitdrukking $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$ heeft $\boldsymbol{a}$ de rol van steunvector, $\boldsymbol{b}$ die van richtingsvector en λ is parameter. Met andere woorden: $\boldsymbol{a}$ wijst een punt van de lijn aan, $\boldsymbol{b}$ geeft de richting van de lijn, en door λ te variëren verkrijgen we elk willekeurig punt van de lijn.

Om de vraag te beantwoorden moeten we twee verschillende steunvectoren en twee verschillende richtingsvectoren vinden. Voor de hand liggende keuzen voor de steunvectoren zijn $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ of $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; als richtingvector $\boldsymbol{b}$ kunnen we elk willekeurig niet-nul veelvoud van hun verschil $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

nemen. Zodoende vinden we als één oplossing

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en als een andere oplossing

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normering: Eén voorstelling is zo gevonden en levert maximaal 1 punt op; de rest kun je verdienen met de tweede en een goede uitleg.

2. De sfeer met middelpunt O en straal 1 en de elliptische cylinder met vergelijking $x^2 + 2z^2 = 1$ snijden elkaar in een kromme. Geef een parametrisering van dat deel van de kromme waar zowel $y \geq 0$ als $z \geq 0$. 4 pt.

Oplossing: De sfeer heeft vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Punten van de kromme voldoen zowel aan deze vergelijking als aan de vergelijking $x^2 + 2z^2 = 1$ van de cylinder.

Het verschil van deze twee vergelijkingen is $y^2 - z^2 = 0$ oftewel $y = z$, want we kijken alleen naar dat deel waar $y, z \geq 0$. De eindpunten van de kromme zijn $(-1, 0, 0)$ en $(1, 0, 0)$. Merk op dat x, y en z afzonderlijk voldoen aan $-1 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y, z \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Noem de parameter t. Er zijn nu verschillende eenvoudige strategieën mogelijk. De eerste is: noem $z = t$; uit het voorgaande volgt dat dan ook $y = t$, en de vergelijking van de cylinder geeft vervolgens $x^2 = 1 - 2t^2$ oftewel $x = \pm\sqrt{1 - 2t^2}$. Het probleem is dat je nu twee parametrisaties moet geven: eenmaal $(-\sqrt{1 - 2t^2}, t, t)$ met $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en vervolgens moet je t weer terug laten lopen van $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ naar 0 in de parametrisering $(\sqrt{1 - 2t^2}, t, t)$. Dit is niet elegant.

Het knelpunt bij bovenstaande strategie is dat x uit een wortel komt, terwijl je zowel positieve als negatieve x moet krijgen. Dit kun je omzeilen door te kiezen $x = t$ met $-1 \le t \le 1$, en dan $y = z = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$; dit voldoet automatisch aan de vereiste $y, z \ge 0$.

Dus we kiezen als parametrisering

$$\left(t, \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}\right) \quad \text{met } -1 \le t \le 1.$$

Een andere goede parametrisering zou kunnen zijn

$$\left(\cos t, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t\right) \quad \text{met } 0 \le t \le \pi$$

of varianten daarop. In ieder geval moeten de coördinaten van je parametrisering altijd voldoen aan de vergelijkingen van sfeer en cylinder.

3. Een deeltje heeft op tijd t positie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, waarin $\boldsymbol{r}$ voldoet aan het beginwaardeprobleem 4 pt.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{r},$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Los het beginwaardeprobleem op en beschrijf de vorm van de baan ook in woorden.

Oplossing: Eerste methode: met de wetenschap $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ lees je de d.v. als $\boldsymbol{v} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{r}$ en dit herken je als een rotatie om de z-as (denk aan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ met $\boldsymbol{\Omega} = \hat{\mathbf{k}}$). Vermoedelijk heeft de oplossing dus de vorm

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(t+\varphi)\hat{\mathbf{\imath}} + a\sin(t+\varphi)\hat{\mathbf{\jmath}} + b\hat{\mathbf{k}}$$

waarin de fasehoek φ, de baanstraal a en de hoogte van de baan boven het xy-vlak b nog bepaald moeten worden. Invullen van de beginconditie op $t = 0$ geeft

$$\hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{k}} = a\cos\varphi\,\hat{\mathbf{\imath}} + a\sin\varphi\,\hat{\mathbf{\jmath}} + b\hat{\mathbf{k}},$$

waaraan voldaan is voor $a = b = 1$ en $\varphi = 0$. De oplossing is dus

$$\boldsymbol{r} = \cos t\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin t\,\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Tweede methode: schrijf in coördinaten

$$\boldsymbol{r} = r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}}.$$

In coördinaten uitgeschreven zijn er nu drie beginwaardeproblemen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_1 &= -r_2, & r_1(0) &= 1, \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_2 &= r_1, & r_2(0) &= 0, \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_3 &= 0, & r_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Uit de derde vergelijking en beginconditie blijkt direct dat $r_3(t) = 1$ voor alle t. De eerste twee vergelijkingen zijn gekoppeld en met enig meetkundig inzicht zie je dat $(r_1, r_2) = (\cos t, \sin t)$ zowel aan de d.v. als aan de beginwaarden voldoet. Op deze manier vind je dezelfde oplossing als hierboven.

In woorden: de baan is een cirkel met straal 1 en middelpunt $\hat{\mathbf{k}}$ en evenwijdig aan het xy-vlak.

4. Zij $f(x, y) = x^2\mathrm{e}^{3y}$. Geef een benadering van $f(3.05, -0.02)$ met behulp van een linearisering rond $(3, 0)$. 4 pt.

Oplossing: Voor de linearisering $L(x, y)$ van f rond een punt (a, b) geldt algemeen:

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

Hier hebben we $f(x, y) = x^2\mathrm{e}^{3y}$ en dus $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^{3y}$ en $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2\mathrm{e}^{3y}$. Verder hebben we $a = 3$, $b = 0$, $x = 3.05$ en $y = -0.02$. Vullen we dit allemaal in dat krijgen we

$$\begin{aligned} L(3.05, -0.02) &= f(3, 0) + \frac{\partial f(3, 0)}{\partial x}(0.05) + \frac{\partial f(3, 0)}{\partial y}(-0.02) \\ &= 9 + 6 \cdot 0.05 - 27 \cdot 0.02 \\ &= 9 + 0.30 - 0.54 = 8.76. \end{aligned}$$

Dit gebruiken we als benadering van $f(3.05, -0.02)$.

5. We bekijken een bewegend deeltje P met tijdafhankelijke poolcoördinaten (r, θ). Laat de vectorfunctie $\boldsymbol{r}(t)$ de plaats van P op tijdstip t zijn. We definiëren **4 pt.**

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}},$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}.$$

Druk de plaats, snelheid en versnelling van P uit in de vectoren $\hat{\boldsymbol{r}}$ en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Oplossing: Merk eerst op dat $\hat{\boldsymbol{r}}$ en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ allebei eenheidsvectoren zijn en dat vector $\hat{\boldsymbol{r}}$ een hoek θ met de positieve x-as maakt. Van punt P met poolcoördinaten (r, θ) kunnen we dus de positie $\boldsymbol{r}$ uitdrukken als

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}},$$

immers dan heeft $\boldsymbol{r}$ de juiste lengte r en juiste hoek met x-as, θ. Door differentiëren vinden we vervolgens snelheid en versnelling, maar daarvoor is het handig om eerst het volgende klaar te zetten.

Met de definities van $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ en de kettingregel vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\hat{\boldsymbol{r}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}})\,\dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}(-\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}) \\
&= \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}})\,\dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}(-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) \\
&= -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}}.
\end{aligned}$$

Nu kunnen we de snelheid $\boldsymbol{v}$ van P uitdrukken als:

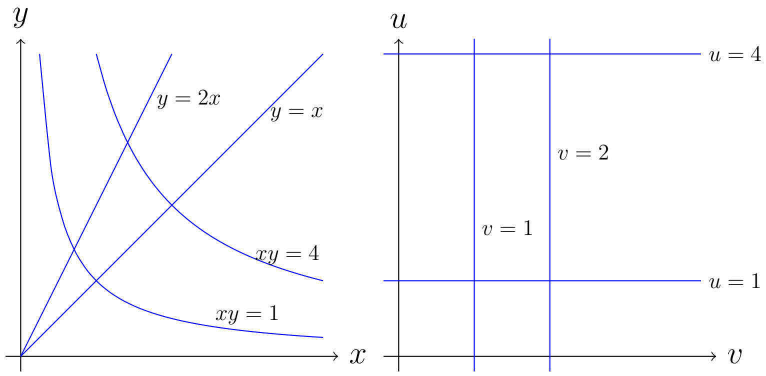
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{\boldsymbol{r}}) \\
&= \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} \\
&= \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.
\end{aligned}$$

Nogmaals differentiëren geeft de versnelling $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}.
\end{aligned}$$

6. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de krommen $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$ en $y = 2x$. 4 pt.
Hint: kies handige coördinaten u, v.

Oplossing:



Handige coördinaten zijn hier $u = xy$ en $v = y/x$. Reden: de randen van het gebied worden dan gegeven door constante coördinaten $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$ en $v = 2$. Zodoende kunnen we de oppervlakte berekenen als de integraal van de Jacobiaan over de rechthoek van $(u, v) = (1, 1)$ tot $(u, v) = (4, 2)$.

Als Jacobiaan hebben we nodig de determinant $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$, maar daarvoor zou je x en y moeten uitdrukken als functies van u en v, net andersom alsdan we hebben. Gelukkig is de determinant van de inverse matrix gelijk aan de inverse van de determinant, m.a.w.:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}.$$

We berekenen daarom:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v,$$

waaruit volgt dat

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2v}.$$

Nu kunnen we de oppervlakte uitdrukken met behulp van de volgende integraal:

$$\int_1^2 \int_1^4 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$= \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{2v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_1^4 \mathrm{d}u \int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{v} = \tfrac{3}{2} \log 2.$$

Opmerking 1: wie doorrekent met de verkeerde Jacobiaan vindt het antwoord 9, maar het moet direct opvallen dat dat veel te veel is. Dat zie je aan de hoekpunten in (x, y)-coördinaten van het oppervlakje: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Knappe vogelaar die daar een vierkant van 3 bij 3 in weet te frommelen, en wie dat ontgaat valt in de categorie "herkent evident foute resultaten niet".

Opmerking 2: Moraal van opmerking 1: dit soort zelfcontrole leer je door altijd zelf naar manieren te zoeken om de validiteit van je antwoorden te checken i.p.v. op een antwoordenboek te vertrouwen! Zie ook het negende gebod op de site.

Opmerking 3: strikt genomen ligt er nog een zelfde oppervlakje gespiegeld in de oorsprong (met negatieve x, y) maar dat scheld ik je graag kwijt.

7. Bereken de totale flux van het veld $\boldsymbol{F} = z\hat{\mathbf{k}}$ door de sfeer met straal 2 en middelpunt in de oorsprong. 4 pt.

Oplossing: Het was de bedoeling dat je dit rechtstreeks uitrekent, maar als je hier de divergentiestelling gebruikt ben je wel heel snel klaar: div $\boldsymbol{F} = 1$, dus

$$\iint_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}V = \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \tfrac{32}{3}\pi,$$

waarin $\mathcal{S}$ de bol met straal 2. Geen speld tussen te krijgen dus volle punten waard.

Rechtstreeks uitrekenen gaat als volgt. In het punt $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ op de sfeer met straal 2 is de eenheidsnormaalvector $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$. De flux is dus

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \tfrac{1}{2} z^2 \,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Substitueren we bolcoördinaten met $z = \rho\cos\varphi$, Jacobiaan $\rho^2 \sin\varphi$ en bovendien $\rho = 2$ op $\mathcal{S}$, dan is deze integraal:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \cdot 4\cos^2\varphi \cdot 4\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 16\pi \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \tfrac{16}{3}\pi \left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{32\pi}{3}.\end{aligned}$$

8. Laat met een expliciete berekening zien dat $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ voor elk glad vectorveld $\boldsymbol{F}$ in $\mathbb{R}^3$. 4 pt.

Oplossing: Laat $\boldsymbol{F} = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$. Bereken eerst de curl:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\hat{\mathbf{k}},$$

waarin $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ etc. Neem hiervan de div:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) &= \partial_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\ &= \partial_{12}F_3 - \partial_{13}F_2 + \partial_{23}F_1 - \partial_{21}F_3 + \partial_{31}F_2 - \partial_{32}F_1 \\ &= (\partial_{12} - \partial_{21})F_3 + (\partial_{23} - \partial_{32})F_1 + (\partial_{31} - \partial_{13})F_2 = 0,\end{aligned}$$

waarbij we op het laatst gebruikt hebben dat $\boldsymbol{F}$ glad is waardoor de volgorde van partiëel differentiëren er niet toe doet.

Normering: je moet minimaal wel opmerken dat de gemengde tweede afgeleides niet automatisch tegen elkaar wegvallen.

9. Zij $\boldsymbol{F} = y\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + xz\hat{\mathbf{k}}$. Bepaal met een integraalstelling en gezond verstand $\iint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ indien $\mathcal{V}$ is beschreven door: 6 pt.
   a. $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$,
   b. $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ en $x \geq 0$,
   c. $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ en $x \leq 0$.

Oplossing: Het vectorveld heeft divergentie $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = x$, zodat je met de divergentiestelling krijgt

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} x \, \mathrm{d}V.$$

a. Hier is $\mathcal{V}$ een paraboloide met de z-as als symmetrie-as. In het bijzonder is $\mathcal{V}$ dus ook symmetrisch in het yz-vlak zodat $\iiint x \, \mathrm{d}V = 0$. De flux door het oppervlak van dit gebied is dus 0.

b. Hier moeten we rekenen. Gebruik cylindercoördinaten met $x = r\cos\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$ en $r^2 \leq z \leq 1$, zodat:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} x \, \mathrm{d}V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2(1 - r^2) \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 r^2 - r^4 \, \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^1 \cdot [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) \cdot 2 = \tfrac{4}{15}.
\end{aligned}$$

De flux door het oppervlak van dit deel is dus $\frac{4}{15}$.

c. De gebieden bij (b.) en (c.) zijn samen het gebied bij (a.), dus de integralen $\iiint x \, \mathrm{d}V$ bij (b.) en (c.) moeten optellen tot 0 (de integraal bij (a.)), dus de flux door dit oppervlak is $-\frac{4}{15}$.

Opmerking 1: Bij de opgave werd expliciet gevraagd om gezond verstand te gebruiken. Wie meer dan één integraal expliciet uitrekent, gebruikt te weinig gezond verstand en verliest iets aan punten.

Opmerking 2: Veel studenten dachten dat het gebied bij (a) een kegel is, maar dat is dus niet zo.