

Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Do 2 feb 2017 8:30 – 11:30

Aanwijzingen

- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Neem tijd om te denken, het kan je veel werk besparen
- Zorg voor voldoende **tekst en uitleg** bij je uitwerkingen.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 38 punten.

1. Gegeven zijn drie punten \mathbf{a} , \mathbf{b} en \mathbf{c} in \mathbb{R}^3 .

a. Laat zien dat aan de vergelijking

2 pt.

$$((\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

voldaan is voor $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en $\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

b. Beschrijf meetkundig de verzameling van *alle* punten \mathbf{x} die aan die vergelijking voldoen.

2 pt.

2. We bekijken de coördinatensubstitutie met nieuwe coördinaten (s, t) die voldoen aan:

$$x = st,$$

$$y = \frac{1}{2}(t^2 - s^2).$$

a. Bepaal de Jacobimatrix en Jacobiaan van deze substitutie.

4 pt.

b. Zij f een gladde functie op \mathbb{R}^2 . Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in de nieuwe coördinaten s, t en de partiële afgeleiden van f naar s en t .

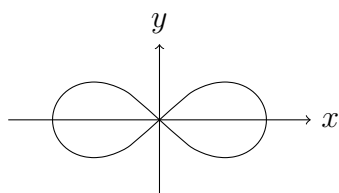
4 pt.

Hints: (1) Lange weg: bereken eerst $x^2 + y^2$ en gebruik het resultaat om s^2 en t^2 uit te drukken als functies van x en y . (2) Korte weg: welke partiële afgeleiden komen voor in de inverse van de Jacobimatrix bij a?

3. Een *lemniscaat* is een kromme in \mathbb{R}^2 met vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (zie figuur). Vind de oppervlakte die de lemniscaat insluit.

4 pt.

Hint: kies de juiste coördinaten.



4. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F} = 3y^3z^5e^{3xy^3}\hat{\mathbf{i}} + 9xy^2z^5e^{3xy^3}\hat{\mathbf{j}} + 5z^4e^{3xy^3}\hat{\mathbf{k}}$ en de kromme γ beschreven met $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$, met $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$. 4 pt.

Bepaal de lijnintegraal $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Hint: \mathbf{F} is conservatief.

5. Zij φ een scalarveld en \mathbf{F} een vectorveld, beide in \mathbb{R}^3 .

a. Toon aan: $\text{curl}(\varphi\mathbf{F}) = \text{grad } \varphi \times \mathbf{F} + \varphi \text{curl } \mathbf{F}$. 4 pt.

b. Neem $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|$ en $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Bereken met een integraalstelling de flux van $\text{grad } \varphi \times \mathbf{F}$ door het oppervlak beschreven door $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ met $z \geq 0$. 4 pt.

6. *De aardappeleters.* Het is crisis en de 5 aardappeleters hebben samen nog maar één enkele aardappel te eten. Omdat de meeste voedingsstoffen in de schil zitten, zoeken ze naar een manier om de aardappel in 5 plakken te snijden met elk evenveel schil. In deze opgave stellen we de aardappel voor als een bol met straal 1.

a. Bepaal grenzen voor θ en z en laat zien dat daarmee 2 pt.

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z)$$

een parametrisatie van de aardappelschil in cilindrische coördinaten is.

b. Laat zien dat in deze parametrisatie het oppervlakte-element dS wordt gegeven door $dS = d\theta dz$. 4 pt.

c. Gebruik dit vervolgens om vier z -coördinaten z_1, z_2, z_3, z_4 te vinden, waarop de aardappel doorgesneden moet worden om alle gezinsleden evenveel schil te geven. 4 pt.

