Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Do 2 feb 2017 8:30 – 11:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Gegeven zijn drie punten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$ in $\mathbb{R}^3$.

   a. Laat zien dat aan de vergelijking 2 pt.

$$((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) = 0.$$

voldaan is voor $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, en $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$.

Oplossing: De vergelijking laat zich lezen als het inproduct

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) = 0$$

waarin

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

Volgens de regels van het uitproduct staat $\boldsymbol{n}$ orthogonaal op $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$: maar dan is $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$ voor $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Verder, als $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ dan is $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ en dus ook $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$.

b. Beschrijf meetkundig de verzameling van *alle* punten $\boldsymbol{x}$ die aan die vergelijking voldoen. 2 pt.

> **Oplossing:** Met $\boldsymbol{n}$ als boven, de vergelijking $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0$ is equivalent met $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c}$; uitgeschreven in coördinaten $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \text{constant}$. Dit is de vergelijking van een vlak door $\boldsymbol{c}$ en met normaalvector $\boldsymbol{n}$, of (vanwege opg. a) het vlak door $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$.

2. We bekijken de coördinatensubstitutie met nieuwe coördinaten (s, t) die voldoen aan:

$$x = st,$$
$$y = \tfrac{1}{2}(t^2 - s^2).$$

a. Bepaal de Jacobimatrix en Jacobiaan van deze substitutie. 4 pt.

> **Oplossing:** De Jacobimatrix is
>
> $$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial st}{\partial s} & \frac{\partial st}{\partial t} \\ \frac{\partial \frac{1}{2}(t^2 - s^2)}{\partial s} & \frac{\partial \frac{1}{2}(t^2 - s^2)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix}.$$
>
> De Jacobiaan is $\det \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix} = t^2 + s^2$.

b. Zij f een gladde functie op $\mathbb{R}^2$. Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in de nieuwe coördinaten s, t en de partiële afgeleiden van f naar s en t. *Hints: (1) Lange weg: bereken eerst $x^2 + y^2$ en gebruik het resultaat om s^2 en t^2 uit te drukken als functies van x en y. (2) Korte weg: welke partiële afgeleiden komen voor in de inverse van de Jacobimatrix bij a?* 4 pt.

> **Oplossing:** Volgens de kettingregel geldt
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},$$
> $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$
>
> We hebben dus de partiële afgleiden van s, t naar x, y nodig. De hint geeft twee manieren om die te vinden: lang of kort.

Lange weg Er geldt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= s^2t^2 + \tfrac{1}{4}(t^2 - s^2)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(s^4 + 2s^2t^2 + t^4) \\ &= \tfrac{1}{4}(s^2 + t^2)^2. \end{aligned}$$

Dit geeft ons

$$s^2 + t^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

en we hadden ook al

$$s^2 - t^2 = -2y.$$

Door deze twee vergelijkingen op te tellen resp. af te trekken vinden we:

$$s^2 = -y + \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$t^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nu beide kanten impliciet differentiëren naar x en y:

$$2s\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2st}{s^2+t^2},$$
$$2s\frac{\partial s}{\partial y} = -1 + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-(s^2+t^2)+(t^2-s^2)}{s^2+t^2} = \frac{-2s^2}{s^2+t^2},$$
$$2t\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2st}{s^2+t^2},$$
$$2t\frac{\partial t}{\partial y} = 1 + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(s^2+t^2)+(t^2-s^2)}{s^2+t^2} = \frac{2t^2}{s^2+t^2}.$$

Hieruit vinden we tenslotte

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{t}{s^2+t^2}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{-s}{s^2+t^2},$$
$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{s}{s^2+t^2}, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{t}{s^2+t^2}.$$

De gevraagde uitdrukkingen zijn dus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{s}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-s}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{t}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Korte weg De Jacobimatrix geeft het verband tussen de oude en de nieuwe differentialen als volgt:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

De inverse matrix lost dit stelsel op voor ds en dt:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix},$$

maar tegelijk geldt:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}.$$

Dus de benodigde partiële afgeleiden zijn de elementen van de inverse Jacobimatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+t^2} \begin{pmatrix} t & -s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Hieruit lezen we af:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{t}{s^2+t^2}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{-s}{s^2+t^2},$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{s}{s^2+t^2}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{t}{s^2+t^2}.$$

De gevraagde uitdrukkingen zijn dus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{s}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-s}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{t}{s^2+t^2}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Opmerking: je kunt hetzelfde ook bereiken door de vergelijkingen $x = st$ en $y = \frac{1}{2}(t^2 - s^2)$ impliciet te differentiëren naar s en t. Dat levert een stelsel van 4 vergelijkingen op waaruit de vier partiële afgeleiden opgelost kunnen worden. In feite doe je dan hetzelfde als de inverse Jacobimatrix berekenen.

3. Een *lemniscaat* is een kromme in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (zie figuur). Vind de oppervlakte die de lemniscaat insluit. *Hint: kies de juiste coördinaten.* 4 pt.

Oplossing: Kies poolcoördinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ met Jacobiaan r, dan krijgt de kromme de gedaante

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

oftewel, met gebruik van verdubbelingsformule,

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Nu is het een beetje opletten: $r = 0$ als $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, en om r reëel te houden moeten we zorgen dat $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ of $\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$. We nemen daarom $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$ van de figuur bijv. het deel in het eerste kwadrant, welke we kunnen parametriseren met $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ en $0 \le r \le a\sqrt{2\cos 2\theta}$. De totale oppervlakte kunnen we dan uitdrukken als

$$\begin{aligned}\iint \mathrm{d}S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = 2a^2.\end{aligned}$$

4. Gegeven is het vectorveld $\boldsymbol{F} = 3y^3z^5e^{3xy^3}\hat{\mathbf{i}} + 9xy^2z^5e^{3xy^3}\hat{\mathbf{j}} + 5z^4e^{3xy^3}\hat{\mathbf{k}}$ en de kromme γ beschreven met $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$, met $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$. 4 pt.

Bepaal de lijnintegraal $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. *Hint:* $\boldsymbol{F}$ *is conservatief.*

Oplossing: Aangezien $\boldsymbol{F}$ conservatief schijnt te zijn, moet er een potentiaal bestaan d.w.z. een scalaire functie φ waarvoor geldt dat $\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{F}$. Met wat scheef turen naar $\boldsymbol{F}$ zie je dat $\varphi = z^5\mathrm{e}^{3xy^3}$ een mooie kandidaat is, en bij narekenen blijkt deze inderdaad de juiste gradiënt te hebben. Het begin- en eindpunt van de kromme γ kunnen we aangeven als

$$\gamma(0) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)\Big|_{t=0} = (1, 0, 1),$$
$$\gamma(\tfrac{\pi}{2}) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)\Big|_{t=\pi/2} = (0, 1, -1).$$

Met behulp van de stelling over lijnintegralen in conservatieve velden vinden we nu de lijnintegraal als volgt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \varphi(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - \varphi(\gamma(0)) \\ &= \varphi(0, 1, -1) - \varphi(1, 0, 1) \\ &= -1 - 1 = -2.\end{aligned}$$

5. Zij φ een scalarveld en $\boldsymbol{F}$ een vectorveld, beide in $\mathbb{R}^3$.

a. Toon aan: $\operatorname{curl}(\varphi \boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F} + \varphi \operatorname{curl}\boldsymbol{F}$. 4 pt.

Oplossing: Schrijf, als gebruikelijk, $\boldsymbol{F} = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$; we zullen ook de korte notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ etc gebruiken. De eerste coördinaat van $\operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F}$ is

$$(\partial_2\varphi)F_3 - (\partial_3\varphi)F_2$$

en de eerste coördinaat van $\varphi \operatorname{curl}\boldsymbol{F}$ is

$$\varphi\left(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2\right).$$

De eerste coördinaat van $\operatorname{curl}\varphi\boldsymbol{F}$ uitwerken m.b.v. de productregel geeft:

$$\begin{aligned}\partial_2(\varphi F_3) - \partial_3(\varphi F_2) &= ((\partial_2\varphi)F_3 + \varphi\partial_2 F_3) - ((\partial_3\varphi)F_2 + \varphi\partial_3 F_2) \\ &= ((\partial_2\varphi)F_3 - (\partial_3\varphi)F_2) + \varphi\left(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2\right).\end{aligned}$$

Dit is dus precies de eerste coördinaat van $\operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F} + \varphi \operatorname{curl}\boldsymbol{F}$. De andere twee coördinaten gaan net zo, waarbij de indices doorschuiven volgens het schema $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Dus de bewering klopt.

b. Neem $\varphi(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|$ en $\boldsymbol{F} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Bereken met een integraalstelling de 4 pt.

flux van $\operatorname{grad}\varphi\times \boldsymbol{F}$ door het oppervlak beschreven door $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ met $z \geq 0$.

Oplossing: We hebben hier $\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, en dus volgt uit opg. a dat $\operatorname{curl}(\varphi\boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F}$. Noem het gegeven oppervlak $\mathcal{S}$ en merk op dat het een kegelmantel is; de rand $\partial\mathcal{S}$ is de cirkel om de oorsprong met straal 2 in het xy-vlak. Dan krijgen we de volgende berekening voor de flux:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}S &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\varphi\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \text{ wegens a}\\ &= \oint_{\partial\mathcal{S}} \varphi\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \text{ wegens Stokes}\\ &= 2\oint_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \text{ want } \varphi(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}| = 2 \text{ op } \partial\mathcal{S}\\ &= 0.\end{aligned}$$

De laatste gelijkheid is waar omdat $\boldsymbol{F}$ rotatievrij is, dus $\boldsymbol{F}$ moet wel conservatief zijn en dus is de kringintegraal 0. Maar als je dat niet ziet kun je het ook uitrekenen met de parametrisering $\boldsymbol{r}(t) = 2(\cos t, \sin t, 0)$ voor $0 < t < 2\pi$:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathcal{S}} F\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 2\int_0^{2\pi} (1,1,1)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{2\pi} \cos t - \sin t\,\mathrm{d}t\\ &= 2(\sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Opmerking: Veel kandidaten pakken hier niet Stokes maar de divergentiestelling, maar daarmee bereken je dan de flux door het hele oppervlak van de kegel (mantel+grondvlak i.p.v. alleen mantel). Daar moet je dan vergelijkbare manipulaties bij uitvoeren, bovendien is het niet geheel onmogelijk om de vraag op die manier te interpreteren, dus dat hebben we dan ook maar goedgerekend (mits goed uitgevoerd natuurlijk).

6. *De aardappeleters.* Het is crisis en de 5 aardappeleters hebben samen nog maar één enkele aardappel te eten. Omdat de meeste voedingsstoffen in de

schil zitten, zoeken ze naar een manier om de aardappel in 5 plakken te snijden met elk evenveel schil. In deze opgave stellen we de aardappel voor als een bol met straal 1.

a. Bepaal grenzen voor θ en z en laat zien dat daarmee 2 pt.

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = (\sqrt{1-z^2}\cos\theta, \sqrt{1-z^2}\sin\theta, z)$$

een parametrisatie van de aardappelschil in cylindrische coördinaten is.

Oplossing: Aangezien $|\boldsymbol{r}(\theta, z)|^2 = (1-z^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z^2 = 1$, ligt $\boldsymbol{r}$ voor alle (θ, z) op het boloppervlak. Om het hele oppervlak te bestrijken moeten we $0 < \theta < 2\pi$ (volledige rotatie om de z-as) nemen en $-1 < z < 1$ (simpel gezegd: van de zuidpool tot de noordpool).

b. Laat zien dat in deze parametrisatie het oppervlakte-element $\mathrm{d}S$ wordt gegeven door $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. 4 pt.

Oplossing: Dit doen we met twee raakvectoren en hun uitproduct:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (-\sqrt{1-z^2}\sin\theta, \sqrt{1-z^2}\cos\theta, 0)$$

en

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \left(-\frac{z\cos\theta}{\sqrt{1-z^2}}, -\frac{z\sin\theta}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right),$$

zodat

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = (\sqrt{1-z^2}\cos\theta, \sqrt{1-z^2}\sin\theta, z) = \boldsymbol{r};$$

bij a hebben we al gezien dat $|\boldsymbol{r}| = 1$ dus

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right| \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

zoals gesteld.

c. Gebruik dit vervolgens om vier z-coördinaten z_1, z_2, z_3, z_4 te vinden, waarop de aardappel doorgesneden moet worden om alle gezinsleden evenveel schil te geven. 4 pt.

Oplossing: Het schiloppervlak van een schijf tussen twee willekeurige z-coördinaten z_a en z_b is

$$\iint_{\text{schijf}} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_{z_a}^{z_b} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\theta = 2\pi(z_b - z_a).$$

De oppervlakte blijkt dus alleen van de dikte van de plak af te hangen, en niet van waar die plak uit de bol is gesneden (verrassing!). Ze moeten dus de aardappel in vijf even dikke plakken snijden op $z_1 = -\frac{3}{5}$, $z_2 = -\frac{1}{5}$, $z_3 = \frac{1}{5}$, $z_4 = \frac{3}{5}$