Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Di 18 apr 2017 13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg voor voldoende **tekst en uitleg** bij je uitwerkingen.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 34 punten.

1. Vind alle kritieke punten van $f(x, y) = (x + 3)(2y + 1)(x + 3y - 3)$. 4 pt.

2. We gebruiken de gebruikelijke notatie voor coördinaten $\boldsymbol{a} = a_1\hat{\mathbf{\imath}} + a_2\hat{\mathbf{\jmath}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ etc. Toon aan dat de vergelijking 4 pt.

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_1 - b_1 & x_1 - c_1 \\ x_2 - a_2 & x_2 - b_2 & x_2 - c_2 \\ x_3 - a_3 & x_3 - b_3 & x_3 - c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

een vlak beschrijft door de punten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$.
Hint: denk aan de definitie van determinant als tripelproduct.

3. We gebruiken hier de notatie $y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$ etc. en bekijken de partiële d.v. (PDV) $y_t = y_{xx}$.
   a. Laat zien dat de functie $u(x, t) = t^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4t}$ een oplossing is van de PDV. 4 pt.
   b. Zij $v(x, t) = x/t$. Laat zien dat ook het product uv voldoet aan de PDV, door het product te differentiëren met de productregel en te gebruiken wat je al weet. 4 pt.

4. Een kromme is voor $0 \leq t \leq 1$ geparametriseerd met 4 pt.

$$\boldsymbol{r}(t) = t\cos(2\pi t)\hat{\mathbf{\imath}} + t\sin(2\pi t)\hat{\mathbf{\jmath}} + (1 - t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Bereken de lengte van de kromme.
Je mag gebruiken dat $\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$.

5. Bereken het volume dat wordt ingesloten door de cylinder $x^2 + y^2 = 2ay$, de kegel $2a - \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$ en het vlak $z = 0$. 6 pt.

6. Zij $\boldsymbol{F} = (2x^3y\cos^2 z, -3x^2y^2\sin^2 z, 6x^2y\sin z\cos z)$. Bestaat er een vectorveld $\boldsymbol{G}$ zodanig dat $\nabla \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$? 4 pt.

7. Gegeven het vectorveld $\boldsymbol{F} = (-y,\, x\cos(1 - x^2 - y^2),\, yz)$ en de kromme $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 2, z = 2$. Bereken met een integraalstelling de (opwaartse) flux van $\nabla \times \boldsymbol{F}$ door een glad oppervlak waarvan $\mathcal{C}$ de rand is. 4 pt.