Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}\!\mathcal{B}\mathcal{C}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISN101 werd in 2007/2008 gegeven door Dhr. J. van de Leur.

Wiskundige Technieken II (WISN101)
28 januari 2008

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt. Het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan. U mag gebruik maken van een grafische rekenmachine.

Opgave 1

a) Bepaal alle reële oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 0\,.$$

b) Wat is de periode van al deze oplossingen?

c) Los vervolgens het volgende bijbehorende inhomogene beginwaardeprobleem op:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 4\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

Opgave 2

a) Bepaal de waarden van alle locale maxima en minima in $\mathbb{R}^2$ van de functie

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y + 3y^2 + 2y + 25\,.$$

b) Bepaal met de kleinste-kwadratenmethode de rechte lijn die het best past bij de punten $(0,1)$, $(1,2)$ en $(3,2)$.

Opgave 3

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$ op $\mathbb{R}^3$ met weglating van de z-as.

a) Bereken div$\mathbf{F}$ en rot$\mathbf{F}$.

b) Zoek een functie f zodat $\mathbf{F} = \text{grad} f$. Wat is een mogelijke aanwijzing dat zo'n functie bestaat?

Bereken de arbeid

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

waarbij C de spiraal is met beginpunt $(1,0,0)$ en eindpunt $(1,0,16)$, die geparametriseerd wordt door

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), t^2), \qquad 0 \le t \le 4,$$

op de volgende twee manieren:

c) Rechtstreeks.

d) Door gebruik te maken van een stelling.

Opgave 4

Gegeven de kromme K met parametrisatie $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\sin(t), 1 + 4\cos(t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Schets de kromme K en geef aan in welke richting de kromme doorlopen wordt.

b) Bereken de lijnintegraal $\int_K -ydx + xdy$ en bepaal daarmee de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door K.

Opgave 5

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = (x, y, z)$ op $\mathbb{R}^3$. Bereken

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

waarbij S de de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ is en waarbij we de normaalvector $\mathbf{n}$ naar buiten gericht nemen, op de volgende twee manieren:

a) Rechtstreeks.

b) Door gebruik te maken van de divergentiestelling van Gauss.