Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISN101 werd in 2007/2008 gegeven door Dhr. J. van de Leur.

Wiskundige Technieken II (WISN101)
28 januari 2008

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt. Het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan. U mag gebruik maken van een grafische rekenmachine.

Opgave 1

a) Bepaal alle reële oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 0\,.$$

Oplossing: Vul $e^{\lambda t}$ in, dit geeft $\lambda = -1 \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}$, dus de algemene oplossing is

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{1}{2}\sqrt{15}t + B\sin\frac{1}{2}\sqrt{15}t\right)\,.$$

b) Wat is de periode van al deze oplossingen?

Oplossing: Periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{15}} = \cdots$.

c) Los vervolgens het volgende bijbehorende inhomogene beginwaardeprobleem op:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 4\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

Oplossing: Bepaal eerst de particuliere oplossing, vul daarvoor $a\cos t + b\sin t$ in. Dit geeft $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{2}{5}$. Algemene oplossing is dus van de vorm

$$x(t) = \frac{6}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{1}{2}\sqrt{15}t + B\sin\frac{1}{2}\sqrt{15}t\right)\,.$$

Vul nu de beginvoorwaarden in dit geeft $A = -\frac{6}{5}$ en $B = -\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{15}}$.

Opgave 2

a) Bepaal de waarden van alle locale maxima en minima in $\mathbb{R}^2$ van de functie

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y + 3y^2 + 2y + 25\,.$$

Oplossing: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y + 3 = 0$. Dus $x = -y = \frac{3}{4}$ is het kritieke punt. Bepaal de Hessiaan:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 8 > 0\,.$$

Aangezien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ Hebben we hier te maken met een minimum namelijk $f(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) = \cdots$ reken zelf uit!

b) Bepaal met de kleinste-kwadratenmethode de rechte lijn die het best past bij de punten $(0,1)$, $(1,2)$ en $(3,2)$.

Oplossing: Opl: Laat $y = ax + b$ de lijn zijn dan, moeten we de volgende functie minimaliseren:

$$f(a, b) = (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (3a+b-2)^2 \,.$$

Kritiek punt bepalen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a} = 10a + 4b - 8 = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a} = 4a + 3b - 5 = 0$$

Dit geeft $a = \frac{2}{7}$ en $b = \frac{9}{7}$, dit is altijd een minimum!

Opgave 3

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$ op $\mathbb{R}^3$ met weglating van de z-as.

a) Bereken div$\mathbf{F}$ en rot$\mathbf{F}$.

Oplossing:

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1, \quad \text{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)\,.$$

b) Zoek een functie f zodat $\mathbf{F} = \text{grad}f$. Wat is een mogelijke aanwijzing dat zo'n functie bestaat?

Oplossing: $f = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}z^2$, aanwijzing rot$\mathbf{F} = (0, 0, 0)$.

Bereken de arbeid

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

waarbij C de spiraal is met beginpunt $(1, 0, 0)$ en eindpunt $(1, 0, 16)$, die geparametriseerd wordt door

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), t^2), \qquad 0 \leq t \leq 4,$$

op de volgende twee manieren:

c) Rechtstreeks.

Oplossing:

$$\int_0^4 \begin{pmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi \sin \pi t \\ \pi \cos \pi t \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^4 2t^3 dt = 128$$

d) Door gebruik te maken van een stelling.

Oplossing: Dit is gelijk aan $f(\text{eindpunt}) - f(\text{begindpunt}) = f(1, 0, 16) - f(1, 0, 0) = 128$

Opgave 4

Gegeven de kromme K met parametrisatie $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\sin(t), 1 + 4\cos(t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Schets de kromme K en geef aan in welke richting de kromme doorlopen wordt.

Oplossing: Ellips, doorlopen met de klok mee.

b) Bereken de lijnintegraal $\int_K -ydx + xdy$ en bepaal daarmee de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door K.

Oplossing:

$$\int_0^{2\pi} -(1 + 4\cos(t))d(1 + 2\sin(t)) + (1 + 2\sin(t))d(1 + 4\cos(t)) =$$

$$\int_0^{2\pi} -(1 + 4\cos(t))2\cos(t)dt + (1 + 2\sin(t))(-4)\sin(t)dt = -16\pi$$

Formule voor oppervlakte is $\frac{1}{2}\int_{\text{Kromme}} -ydx + xdy$. Echter de kromme moet tegen de klok in doorlopen worden, dus opp.$= -\frac{1}{2}\int_K -ydx + xdy = 8\pi$

Opgave 5

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = (x, y, z)$ op $\mathbb{R}^3$. Bereken

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

waarbij S de de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ is en waarbij we de normaalvector $\mathbf{n}$ naar buiten gericht nemen, op de volgende twee manieren:

a) Rechtstreeks.

Oplossing: De eenheidsnormaal $\mathbf{n} = \frac{1}{4}(x, y, z)$ dus we krijgen:

$$\int_S \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2) dA = 4 \int_S 1 dA = 4 \times \text{ opp. bol} = 256\pi \, .$$

b) Door gebruik te maken van de divergentiestelling van Gauss.

Oplossing: $\operatorname{Div} \mathbf{F} = 3$, dus als antwoord krijgen we 3 keer de inhoud van de bol.