

DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{I}\mathcal{B}\mathcal{C}$ VAN A-ESKWA-
DRAAT.
HET COLLEGE WISN101 WERD IN 2007/2008 GEGEVEN DOOR DHR. J. VAN DE
LEUR.

Wiskundige Technieken II (WISN101)

17 maart 2008

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt. Alle opgaven tellen even zwaar. 7 opgaven bepalen het cijfer van dit tentamen. De opgave waarvoor u het minste aantal punten behaalt wordt niet meegerekend bij de bepaling van het eindcijfer. Het raadplegen van boeken, dictaten, formuleblad of eigen aantekeningen is niet toegestaan. U mag gebruik maken van een grafische rekenmachine.

Opgave 1

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$ op \mathbb{R}^3 met weglating van $(0, 0, 0)$.

- Bereken $\operatorname{div}\mathbf{F}$ en $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.
- Zoek een functie f zodat $\mathbf{F} = \operatorname{grad}f$. Wat is een mogelijke aanwijzing dat zo'n functie bestaat?

Opgave 2

- Los op $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ waarbij $y(0) = 2$.
- Geef alle oplossingen van $\frac{dx}{dt} - 3x = t^2$.
- Geef de oplossing van
- waarvoor $x(0) = 2$.

Opgave 3

- Maak gebruik van impliciete differentiatie om $\frac{dy}{dx}$ te bepalen voor elk punt op de gesloten kromme $x^4 + y^4 = 32$.
- Bepaal de raaklijn in het punt $(2, -2)$ aan deze kromme.

Opgave 4

- a) Bepaal de plaatsen in \mathbb{R}^2 waar de functie

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 5.$$

een lokaal maximum of minimum heeft.

- b) Bepaal de waarden van die lokale maxima en minima.

Opgave 5

Vind met behulp van de multiplicatoren van Lagrange het minimum van de functie

$$g(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$$

onder de voorwaarden dat $xyz = 4$.

Opgave 6

- a) Geef alle oplossingen van

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0.$$

- b) Bepaal de oplossing van

- c) die voldoet aan $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$. Schrijf de oplossing in de vorm $C \cos(\omega t + \varphi)$ met $C > 0$ en $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Opgave 7

De baan van een deeltje in een krachtveld wordt beschreven door

$$\mathbf{r}(t) = [3 \sin(2t + 1), 3 \cos(2t + 1)].$$

- a) Laat zien dat de snelheidsvector $\mathbf{v}(t)$ van het deeltje loodrecht staat op $\mathbf{r}(t)$ en op de versnellingsvector $\mathbf{a}(t)$.
- b) Laat m de massa van het deeltje zijn. Gebruik $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ en bereken de arbeid van krachtveld op het deeltje van tijdstip $t = 0$ tot tijdstip $t = 1$.

Opgave 8

Bereken

$$\iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dA, \quad \text{waarbij } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

en de eenheidsnormaal \mathbf{n} naar buiten gericht is, op de volgende twee manieren:

- a) Rechtstreeks (Hint: gebruik eventueel dat $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$).
- b) Door gebruik te maken van een integraal stelling.