Opgave 1

Bepaal een primitieve van

a) $f(x) = x^2 \sin(3x)$

oplossing: Je moet dit twee keer partiëel integreren waarbij je telkens primitieven moet nemen van de sinus en cosinus die voorkomt en afgeleiden van de polynomen.

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(3x)dx =& - 1/3x^2 \cos(3x) + \int \frac{2}{3}x \cos(3x)dx \\ =& - 1/3x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9}x \sin(3x) - \frac{2}{9}\int \sin(3x)dx \\ =& - 1/3x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9}x \sin(3x) - \frac{2}{27}\cos(3x) + c\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x}{2x^2 - 3}$

x is ongeveer de afgeleide van $2x^2 - 3$ ofwel

$$\int \frac{x}{2x^2-3}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2-3}d(2x^2-3) = \frac{1}{4}\ln|2x^2-3| + c$$

Opgave 2

a) Bepaal alle evenwichtspunten van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy, \qquad \frac{dy}{dt} = xy - y + x - 1\,.$$

b) Bepaal een lineaire benadering rond elk evenwichtspunt.

c) Bepaal voor elk evenwichtspunt of dit een stabiel of instabiel evenwichtspunt is en geef met argumenten aan hoe een oplossing zich in de buurt van de evenwichtspunten gedraagt (Denk hierbij aan zadelpunt, spiraalpunt naar het evenwichtspunt toe, van het evenwichtspunt vandaan, e.d.).

oplossing:

a) Los op $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ dit geeft twee evenwichtspunten, nl. $(1,1)$ en $(-1,-1)$.

b) Voor $(1,1)$ ontwikkel rond dat punt, d.w.z. schrijf $x = \xi + 1$ en $y = \eta + 1$ dan

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi - \eta - \xi\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = 2\xi + \xi\eta\,.$$

Voor het bijbehorende lineaire stelsel bewaart men alleen de eerste-orde termen, dus

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi - \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = 2\xi\,.$$

Doe hetzelfde rond $(-1,-1)$ $(x = \xi - 1, \ldots)$ dit geeft

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -2\eta\,.$$

c) Bepaal de eigenwaarden van de bijbehorende matrices $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Voor $(1,1)$geeft dit $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Aangezien de eigenwaarden complex zijn en het reële deel van beide eigenwaarden negatief is, is dit een stabiel spiraalpunt. Voor $(-1,-1)$ vinden we $\lambda = 1,\ -2$, dus dit is een zadelpunt (dus niet stabiel).

Opgave 3

Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2x = e^t \,.$$

oplossing: Vul $e^{\lambda t}$ in in de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking. Dit geeft $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Vind door invullen van $x = ae^t$ in de inhomogene differentiaalvergelijking de partikuliere oplossing ($a = \frac{1}{2}$), dus

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t + e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) \,.$$

Opgave 4

Geef de tweede-orde Taylorbenadering van $e^x\cos(xy)$ in het punt $(0,0)$.
oplossing:

$$\begin{aligned} f(0,0)+&\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)+ \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2 \end{aligned}$$

Expliciet berekenen geeft als resultaat $1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Opgave 5

Bepaal met de kleinste-kwadratenmethode de rechte lijn die het best past bij de punten $(-1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ en $(3,3)$.
oplossing: Stel $y = ax + b$. We moeten het minimum bepalen van de functie:

$$f(a,b) = (-a+b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (2a+b-3)^2 + (3a+b-3)^2 \,,$$

d.w.z. dat $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$. Dit geeft twee vergelijkingen $30a + 10b - 32 = 0$ en $10a + 8b - 18 = 0$ m.a.w. $a = \frac{19}{35}$ en $b = \frac{11}{7}$.

Opgave 6

Bepaal het maximum en minimum van de functie $f(x,y,z) = x+y$ onder de conditie dat $x^2+y^2+z^2 = 4$.
oplossing: Met behulp van de multiplicatoren van Lagrange:

$$\text{grad}(x+y) = \lambda\text{grad}(x^2+y^2+z^2-4)$$

Dit geeft $2\lambda x = 2\lambda y = 1$ en $2\lambda z = 0$. Merk op dat λ niet nul kan zijn (dus $z = 0$), vul nu de waarden van x, y, z in in de vergelijking $x^2+y^2+z^2 = 4$, dit geeft $\lambda = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}$. En $x = y = \pm\sqrt{2}$, dus maximum $2\sqrt{2}$ in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, minimum $-2\sqrt{2}$ in $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Opgave 7

Bereken de arbeid

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

waarbij $\mathbf{F} = (2x, y, 3z)$ en C de kromme is met beginpunt $(0,0,0)$ en eindpunt $(0,0,16\pi^2)$, die geparametriseerd wordt door

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \sin(t), t^2), \qquad 0 \le t \le 4\pi,$$

op de volgende twee manieren, namelijk (a) rechtstreeks en (b) door gebruik te maken van een stelling.
oplossing: (a) Substitueer de parametrisatie $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sin(t), \sin(t), t^2)$ in $\mathbf{F} = (2\sin(t), \sin(t), 3t^2)$ en neem het inproduct met $d\mathbf{r} = ((x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt) = (\cos(t)dt, \cos(t)dt, 2tdt)$ en integreer dit van 0 tot 4π:

$$\int_0^{4\pi} (3\sin t \cos t + 6t^3)dt = 384\pi^3.$$

(b) $\mathbf{F} = \nabla f$ met $f(x, y, z) = \nabla(x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2)$, dus de arbeid is gelijk aan $f(\text{eindpunt}) - f(\text{beginpunt}) = f(0, 0, 16\pi^2) - f(0, 0, 0) = 384\pi^4 - 0$.

Opgave 8

Gegeven de kromme K met parametrisatie $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), 4\sin(t), \cos(t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Schets de kromme K en geef aan in welke richting de kromme doorlopen wordt.

b) Bereken de lijnintegraal $\int_K ydx - zdy$.

c) Bepaal $\iint_S \mathbf{rot}(2y\mathbf{i} - 2z\mathbf{j})d\mathbf{S}$, waarbij S wordt gegeven door $x(s, t) = s\cos(t)$, $y(s, t) = 4s\sin(t)$ en $z(s, t) = s\cos(t))$ met $0 \leq s \leq 1$ en $0 \leq t \leq 2\pi$. Hierbij kiezen we de normaal van S zodanig dat de z-coördinaat van de normaalvector negatief is.

oplossing:

a) Zelfde als bij (a) van de vorige opgave, dit is $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ waarbij $\mathbf{F} = (y, -z, 0)$, zelfde procedure levert $\int_0^{2\pi} -4dt = -8\pi$.

b) Stokes:

$$\iint_S \mathbf{rot}(2y\mathbf{i} - 2z\mathbf{j})d\mathbf{S} = \int_{-K} 2ydx - 2zdy = -2\int_K ydx - zdy = (\text{m.b.v. (a)}) = 16\pi\,.$$